

Chapitre I- ESPACES AFFINES , GENERALITES.

Bien que l'on puisse construire la notion d'espace affine à partir d'un espace vectoriel quelconque sur un corps quelconque, on a choisi de définir cette notion dans le cadre suivant. Un espace affine est la donnée d'un ensemble non vide E et d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension finie sur un corps commutatif K . Les éléments de E sont appelés des points, les éléments de $\vec{E}$ sont appelés des vecteurs. Les points et les vecteurs sont liés par des relations ayant certaines propriétés qui caractérisent la structure affine. Le corps de base K désigne le corps des réels ou le corps des complexes et en pratique, K sera le corps des réels. Les vecteurs seront surmontés d'une flèche à l'exception du vecteur nul, les scalaires, éléments du corps K seront représentés par des lettres grecques.

La notion mathématique qui permet de lier les points et les vecteurs est la notion de groupe opérant sur un ensemble, le groupe étant le groupe additif de l'espace vectoriel. Ainsi un espace affine est la donnée d'un espace vectoriel opérant sur un ensemble.

On peut construire un espace affine à partir de la notion plus naturelle de vecteur libre, un vecteur de l'espace vectoriel est défini à partir de deux points de l'ensemble. Ce point de vue est en général adopté dans l'enseignement secondaire.

1) Définition, relation de Chasles

On donne les deux présentations équivalentes des espaces affines :

* A partir de la notion de vecteur libre

Définition: Un espace affine est la donnée d'un couple $(E, \vec{E})$ où E est un ensemble non vide et $\vec{E}$ est un espace vectoriel et d'une application de $E \times E$ dans $\vec{E}$ qui à (x, y) associe le vecteur $\vec{xy}$ vérifiant les conditions suivantes:

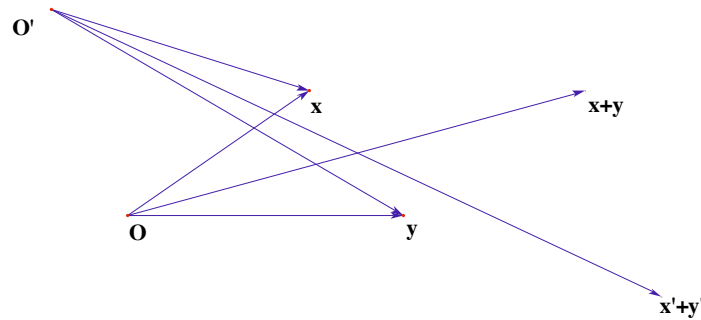
a) Pour tous x, y et z dans E , on a $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$ (relation dite de CHASLES)

b) Pour tout x dans E l'application ϕ_x qui à y de E associe le vecteur $\vec{xy}$ est une bijection de E sur $\vec{E}$.

Les éléments de E sont appelés des points, $\vec{E}$ est la direction de l'espace affine ou l'espace vectoriel associé à E .

Dans b), le point x est appelé l'origine, choisir une origine revient donc à donner une structure vectorielle à l'ensemble des points, on dit alors que l'on a **vectorialisé E au point x** .

Ainsi par exemple, le plan affine usuel devient un espace vectoriel lorsque une origine est choisie et que l'on a défini la somme des points à partir de la règle dite "du parallélogramme".



Chaque origine donne une structure d'espace vectoriel différente (bien que elles soient isomorphes).

Si $\vec{u}$ est un vecteur fixé de $\vec{E}$, on appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée $T_{\vec{u}}$ qui à un point x de E associe le point $y = x + \vec{u}$. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- 1) T_0 est l'application identique Id_x .
- 2) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$ et les translations commutent.
- 3) $T_{\vec{u}}$ est bijective et sa bijection réciproque est $T_{-\vec{u}}$.

Si x est un élément fixé de E , l'application ϕ_x est bijective et par conséquent sa bijection réciproque associe à un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ un point y tel que $\vec{xy} = \vec{u}$. On écrira alors $x + \vec{u} = y$, ce qui voudra dire que le point y est obtenu à partir du point x à l'aide de la translation de vecteur $\vec{u}$.

On remarquera que la notation additive $x + \vec{u} = y$ est la notation d'une loi externe et non pas interne. Elle n'a pas les propriétés de l'addition, dans l'espace vectoriel. Cependant on a les règles de calcul suivantes :

Si x, y, z sont des points de E et $\vec{u}, \vec{v}$ sont des vecteurs de $\vec{E}$ alors :

- 1) $\vec{xx} = 0$
- 2) $x + 0 = x$
- 3) $\vec{xy} = -\vec{yx}$
- 4) $\vec{xy} = 0$ si et seulement si $x = y$
- 5) $x + (\vec{u} + \vec{v}) = (x + \vec{u}) + \vec{v}$

Exemple standard d'espace affine, un espace vectoriel est toujours un espace affine sur lui-même.

Si E est un espace vectoriel, et si x et y sont deux éléments de E , alors $x = y + (x-y)$.
On peut considérer que l'on obtient x à partir de y et de la translation de vecteur $(x-y)$.
L'application qui au couple (x,y) associe le vecteur $(x-y)$ définit une structure affine de E sur lui-même.

Noter que x et y sont considérés comme des points et que $(x-y)$ est considéré comme vecteur !!!

***A partir de la notion de groupe opérant sur un ensemble :**

Le groupe est le groupe additif de l'espace vectoriel $\vec{E}$, l'ensemble est l'ensemble de points E , l'opération à droite est notée additivement. les points a) et b) indiquent que $+$ est une opération à droite, le point c) indique que l'opération est transitive et le point d) que l'opération est simplement transitive ou fidèle.

Définition: Un espace affine est la donnée d'un couple $(E, \vec{E})$ où E est un ensemble et $\vec{E}$ est un espace vectoriel et d'une application de $E \times \vec{E}$ dans E qui à x dans E et un vecteur $\vec{xy}$ associe un point y noté $x + \vec{xy}$ vérifiant les conditions suivantes:

- a) Pour tout x dans E , on a $x + 0 = x$.
- b) Pour tout x dans E , pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$, $x + (\vec{u} + \vec{v}) = (x + \vec{u}) + \vec{v}$.
- c) Pour tous x, y , dans E , il existe un vecteur noté $\vec{xy}$ tel que $y = x + \vec{xy}$.
- d) Pour tout x dans E , pour tout $\vec{u}$ dans $\vec{E}$, si $x + \vec{u} = x$ alors, $\vec{u} = 0$.

On montre facilement que la définition ci-dessus est équivalente à la précédente et par conséquent, on peut utiliser les deux notions indifféremment suivant les problèmes posés.

Dans la suite, on travaillera essentiellement à partir de la notion de vecteur libre, notion moins abstraite que la notion de groupe opérant sur un ensemble.

2) Barycentres, propriétés des barycentres, fonction de Leibniz.

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine où $\vec{E}$ est un espace vectoriel sur un corps commutatif K .
On appelle point x de E affecté du coefficient α ou point pondéré tout élément (x, α) du produit cartésien $E \times K$.

Théorème et Définition : Soit $\{(a_i, \alpha_i) / i=1, \dots, p\}$ une famille finie de p points pondérés de $E \times K$ telle que la somme $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 0$. Alors il existe un unique point de E , g tel que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{ga_i} = 0$. Ce point est appelé **barycentre du système de points pondérés et noté $g = \text{bary}\{(a_i, \alpha_i) / i=1 \dots p\}$**

Compte tenu de la relation de Chasles, la propriété $\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{ga_i} = 0$ est équivalente à la propriété ci-dessous:

$$" \text{ Si } a \text{ est dans } E, \left(\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \right) \vec{ag} = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{aa_i} "$$

Existence :

On note $\sigma = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i$ et si a est dans E , on considère le vecteur $\vec{u} = 1/\sigma \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{aa_i}$ alors il existe g dans E (à priori dépendant de a) tel que $\vec{ag} = \vec{u}$ ainsi $\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{ga_i} = 0$.

Unicité :

Supposons qu'il existe g et h dans E tels que $0 = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{ha_i} = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{ga_i}$ alors, $\vec{gh} = 0$ et $g=h$.

On notera que l'unicité garantit le fait que g ne dépend plus de a .

Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $\{(a_i, \alpha_i) / i=1, \dots, p\}$ une famille finie de points pondérés de $E \times K$. L'application f de E dans $\vec{E}$ qui à m dans E associe $f(m) = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{ma_i}$ est appelée fonction de Leibniz.

On montre que :

- Si $\sigma = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i = 0$ alors, f est une application constante.

- Si $\sigma \neq 0$ alors si m est dans E , $f(m) = \sigma \vec{mg}$ et f est bijective (g est le barycentre de la famille).

Propriétés des barycentres.

1) Commutativité .

Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points.

2) Soit k un scalaire non nul, alors le barycentre du système $\{(a_i, \alpha_i) / i=1, \dots, p\}$ est égal au barycentre du système $\{(a_i, k\alpha_i) / i=1, \dots, p\}$. Ainsi, on peut toujours se ramener au cas où la somme $\sigma=1$.

3) Associativité.

Dans la recherche du barycentre d'un système de points pondérés, on peut remplacer k d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants.

Définitions : Lorsque tous les coefficients sont égaux et non nuls, le barycentre est appelé isobarycentre des points. L'isobarycentre de deux points est appelé le milieu des deux points.

Si x et y sont deux points distincts, la droite passant par ces points est l'ensemble des barycentres de ces points.

Si x et y sont deux points distincts, et que le corps de base est le corps des réels, on appelle segment, noté $[x y]$ l'ensemble des points barycentre des points x et y pondérés par des coefficients positifs ou nuls.

Remarque :

Il ne faut pas confondre isobarycentre et centre de gravité, bien que ces notions coïncident dans le cas où l'on a deux points distincts ou trois points non alignés. (Cf. ex. 10)

Application :

Soient quatre points A, B, C et D non coplanaires et G l'isobarycentre de $ABCD$. On note G' l'isobarycentre de ABC . Alors G est la barycentre de $(G', 3)$ et $(D, 1)$ et par conséquent, G, G' et D sont colinéaires.

Si I est le milieu de AB et J le milieu de CD alors G est le milieu de IJ .

Exercices du chapitre I

Exercice 1

Exemples et contre-exemples d'espaces affines :

a) On considère un système linéaire de n équations à n inconnues. Montrer que l'ensemble des solutions de ce système est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

b) On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

c) On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1 (c'est le cercle unité). On définit la loi externe $\Phi : U \times \mathbb{C} \rightarrow U$ qui à un réel t et z dans U associe $\Phi(t, z) = ze^{it}$. Montrer que Φ est transitive et ne définit pas une structure d'espace affine sur U .

Exercice 2

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension ≥ 2 .

a) On donne trois points A, B, C non alignés, on considère l'isobarycentre de ces points. Quelle propriété remarque-t-on ?

b) On donne quatre points A, B, C, D , trois d'entre eux n'étant jamais alignés et on considère l'isobarycentre de ces points. Montrer qu'il est situé sur sept droites remarquables.

c) On donne cinq points et leur isobarycentre. Que peut-on noter d'intéressant ?

Exercice 3

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. On considère un point I et trois points A, B, C et leurs symétriques respectifs A', B', C' par rapport à I . Montrer que :

a) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AB'} + \vec{AC'} = 2\vec{AA'}$

b) Si M est un point de E , $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} = 6\vec{MI}$.

Exercice 4

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. On considère trois points A, B, C .

a) Montrer que l'application f de E dans $\vec{E}$ qui à M dans E associe le vecteur $f(M) = 5\vec{MA} - 7\vec{MB} + 2\vec{MC}$ est constante.

b) Plus généralement si a, b, c sont des scalaires tels que $a+b+c = 0$ alors l'application f de E dans $\vec{E}$ qui à M dans E associe $f(M) = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ est constante.

Exercice 5

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. On considère trois points A, B et C .

a) Soit l'application f de E dans $\vec{E}$ qui à M dans E associe le vecteur $f(M) = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ montrer qu'il existe un point G unique tel que $f(G)=0$. En déduire que f est bijective..

b) Plus généralement, si a, b et c sont des scalaires tels que $a+b+c \neq 0$ alors l'application f de E dans $\vec{E}$ qui à M dans E associe le vecteur $f(M) = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ est bijective.

Exercice 6

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine, le corps de référence est le corps des réels. Soient trois points distincts A, B, C et des scalaires, a, b, c, a', b', c' tels que $a+b+c$ et $a'+b'+c'$ sont différents de 0.

Si k est un scalaire, on pose $f(k) = M = \text{bary}\{(A, a+ka'), (B, b+kb'), (C, c+kc')\}$.

a) On suppose que (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels. Trouver t tel que f soit une application de $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ dans E . Quelle est l'image de f ?

b) Que se passe-t-il lorsque (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels ?

Exercice 7

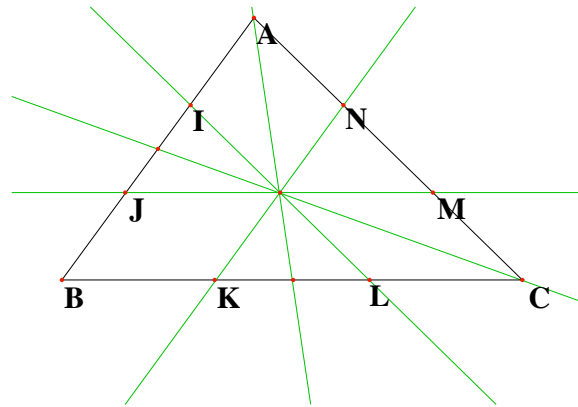
Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. Soient quatre points distincts A, B, C et D trois d'entre eux n'étant pas alignés. On dira que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) (A, B, C, D) est un parallélogramme.
- b) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
- c) Les côtés opposés sont parallèles deux à deux (c'est-à-dire $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$).

Exercice 8

Soient A, B, C trois points non alignés. Chacun des segments $[AB], [BC], [CA]$ est partagé en trois segments de même longueur. Les points I, J, K, L, M, N sont définis par le dessin ci-dessous :



- 1) Soit E un point quelconque de la droite (IL) et F un point quelconque de la droite (KN) . Montrer que les points I, L, K, N, E, F sont des barycentres des points A, B, C .
- 2) Soit G le point d'intersection des droites (IL) et (KN) . Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B, C .
- 3) En déduire que les trois droites (IL) , (KN) et (JM) sont concourantes en l'isobarycentre de A, B, C .
- 4) Retrouver ce résultat en faisant intervenir des parallélogrammes bien choisis.

Exercice 9

$(E, \vec{E})$ est un espace affine de dimension 2 (un plan affine). On considère trois points A, B, C non alignés et trois réels a, b, c différents de 1. On pose :

$$L = \text{bary}\{(B, 1), (C, -a)\}, \quad M = \text{bary}\{(C, 1), (A, -b)\}, \quad N = \text{bary}\{(A, 1), (B, -c)\};$$

$$L' = \text{bary}\{(C, 1), (B, -a)\}, \quad M' = \text{bary}\{(A, 1), (C, -b)\}, \quad N' = \text{bary}\{(B, 1), (A, -c)\}.$$

- a) Quelle est la relation algébrique entre a, b, c qui exprime que L, M et N sont alignés ? Si c'est le cas, déterminer d et e pour que $L = \text{bary}\{(M, d), (N, e)\}$.
- b) Si L, M, N sont alignés sur une droite D , montrer que L', M' et N' sont alignés sur une droite D' dite isotomique de D par rapport au triangle ABC .
- c) Montrer que si L, M, N sont alignés, les milieux des segments AL, BM et CN sont aussi alignés sur une droite parallèle à l'isotomique D' .

Exercice 10

Soient $(E, \vec{E})$ un espace affine et quatre points A, B, C et D formant un quadrilatère quelconque (3 points sont non alignés).

On considère les points M_1 et M_2 du segment $[AB]$ définis par $M_1 = \text{bary}\{(A, 2/3), (B, 1/3)\}$ et $M_2 = \text{bary}\{(A, 1/3), (B, 2/3)\}$.

On construit de la même façon les points M_3 et M_4 à partir du segment $[BC]$, M_5 et M_6 à partir de $[CD]$ et M_7, M_8 à partir de $[DA]$.

- a) Montrer que la droite (M_1M_4) est parallèle à la droite (AC) .
- b) On note P le point d'intersection de la droite (M_1M_8) et de la droite (M_2M_3) et Q le point d'intersection de la droite (M_7M_6) et de la droite (M_5M_4) . On note K le milieu de

PQ, O l'intersection des diagonales (AC) et (BD) et G l'isobarycentre des points ABCD.

Montrer que O, K et G sont alignés.

c) En considérant les isobarycentres des triangles ABC et ACD d'une part, ADB et DBC d'autre part.

Montrer que le centre de gravité du quadrilatère ABCD est K (On suppose que ABCD est une plaque homogène).

Solutions des exercices du chapitre I

Exercice 1

Exemples et contre-exemples d'espaces affines :

a) Un système linéaire de n équations à n inconnues dans un corps commutatif K peut se présenter de la façon suivante :

On se donne une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K notée A et une matrice unicolonne B et on cherche l'ensemble des matrices unicolonnes X vérifiant la relation $AX = B$.

X est une solution du système, l'ensemble des solutions du système est noté $S = \{X \in M_1(K) / AX = B\}$.

On note 0 la matrice unicolonne nulle et $S_0 = \{X \in M_1(K) / AX = 0\}$ l'ensemble des solutions du système obtenu en posant $B=0$ appelé système homogène.

* S peut être vide et S_0 est un espace vectoriel de dimension $n - \text{rang}(A)$.

* Si Y et Z sont dans S alors $Y-Z$ est dans S_0 .

* Si Y est dans S et Z dans S_0 alors $Y+Z$ est dans S .

L'application de $S \times S$ dans S_0 qui à Y et Z associe $Y-Z$ vérifie clairement les axiomes de la définition des espaces affines et par conséquent (S, S_0) est un espace affine.

On notera que si on choisit un point X (une solution du système) alors $S = X + S_0$ (une solution est obtenue à partir de X et d'une solution du système homogène).

b) On note S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle c'est à dire l'ensemble des fonctions $y(x)$ deux fois dérivables vérifiant la relation $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène c'est à dire l'ensemble des fonctions $y(x)$ deux fois dérivables vérifiant la relation $y'' + 2y' + y = 0$.

* S peut être vide et S_0 est un espace vectoriel de dimension 2.

* Si y et z sont dans S alors $y-z$ est dans S_0 .

* Si y est dans S et z dans S_0 alors $y+z$ est dans S .

L'application de $S \times S$ dans S_0 qui à y et z associe $y-z$ vérifie clairement les axiomes de la définition des espaces affines et par conséquent (S, S_0) est un espace affine.

On notera que si on choisit un point y (une solution particulière du système) alors $S = y + S_0$ (une solution est obtenue à partir de y et d'une solution du système homogène).

Pratiquement, on cherche d'abord $S_0 = \{a e^{-x} + b x e^{-x} / a, b \in \mathbb{C}\}$ puis une solution particulière ici ; $1/9 e^{2x}$ et par conséquent $S = 1/9 e^{2x} + S_0$.

c) On remarque que si $z \in U$ alors le module de ze^{it} est aussi 1.

La loi externe $\Phi : U \times \mathbb{C} \rightarrow U$ qui à $t \in \mathbb{C}$ et $z \in U$ associe $\Phi(t, z) = ze^{it}$ est une opération à droite sur $\mathbb{C}$.

L'opération est transitive puisque si z et z' sont dans U alors, $z' = z \times \frac{z'}{z} = z \times e^{i \arg(\frac{z'}{z})}$.

Cependant elle n'est pas simplement transitive puisque $ze^{it} = z$ est vérifiée chaque fois que t est un multiple de 2π .

Exercice 2

a) Compte tenu de la propriété d'associativité des barycentres, on a :

$$\text{isobary}\{A, B, C\} = \text{bary}\{(A,1), (\text{isobary}\{B, C\}, 2)\} = \text{bary}\{(B,1), (\text{isobary}\{A, C\}, 2)\} \\ = \text{bary}\{(C,1), (\text{isobary}\{B, A\}, 2)\}.$$

Ainsi l'isobarycentre de A, B, C appelé centre de gravité est sur la droite passant par A et le milieu de BC (la médiane issue de A), la droite passant par B et le milieu de AC et la droite passant par C et le milieu de AB.

Les trois médianes d'un triangle se coupent en G, centre de gravité du triangle.

b) On fait un raisonnement analogue.

$$G = \text{isobary}\{A, B, C, D\} = \text{bary}\{(A, 1), (\text{isobary}\{B, C, D\}, 3)\} \\ = \text{bary}\{(B,1), (\text{isobary}\{A, C, D\}, 3)\} = \text{bary}\{(C, 1), (\text{isobary}\{B, A, D\}, 3)\} \\ = \text{bary}\{(D,1), (\text{isobary}\{B, A, C\}, 3)\}.$$

G est l'intersection des droites passant par un sommet et l'isobarycentre des trois autres, soit quatre droites.

$$\text{D'autre part } G = \text{isobary}\{A, B, C, D\} = \text{bary}\{(\text{isobary}\{A, B\}, 2), (\text{isobary}\{C, D\}, 2)\} \\ = \text{bary}\{(\text{isobary}\{A, C\}, 2), (\text{isobary}\{B, D\}, 2)\} \\ = \text{bary}\{(\text{isobary}\{A, D\}, 2), (\text{isobary}\{C, B\}, 2)\}$$

G est l'intersection des droites passant par les milieux des côtés soit trois droites.

c) L'isobarycentre des cinq points est l'intersection :

* des droites passant par un sommet et l'isobarycentre des autres soit cinq droites.

* des droites passant par l'isobarycentre de deux points et l'isobarycentre des trois autres soit dix droites.

Exercice 3

I est le milieu de AA', de BB' et de CC'.

a) En utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AB'} + \vec{AC'} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{IC} + \vec{AI} + \vec{IB'} + \vec{AI} + \vec{IC'} \\ = 4\vec{AI} + \vec{B'I} + \vec{C'I} + \vec{B'I} + \vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{AA'}$$

b) De même,

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} = 6\vec{MI} + (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA'} + \vec{IB'} + \vec{IC'}) = 6\vec{MI}$$

En fait, M est l'isobarycentre de A, B, C, A', B', C'.

Exercice 4

a) Si M et N sont deux points de E, alors :

$f(M) = 5\vec{MA} - 7\vec{MB} + 2\vec{MC}$ on intercale le point N en utilisant la relation de Chasles et on obtient :

$$f(M) = 5\vec{MN} - 7\vec{MN} + 2\vec{MN} + 5\vec{NA} - 7\vec{NB} + 2\vec{NC} = f(N)$$

f est constante.

b) De même, $f(M) = a\vec{MN} + b\vec{MN} + c\vec{MN} + a\vec{NA} + b\vec{NB} + c\vec{NC} = f(N)$

Exercice 5

a) Si G est le barycentre de $\{(A,3), (B,-2), (C,1)\}$ et si M est un point de E, alors :

$$f(M) = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} - 2\vec{MG} + \vec{MG} + 3\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{MG}$$

Ainsi il existe G unique tel que $f(G)=0$ et f est bijective.

b) La démonstration est identique en considérant le barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Exercice 6

a) $f(k) = M$ étant un barycentre, il faut que $a+ka'+b+kb'+c+kc' \neq 0$ et par conséquent, $t = -\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}$. On définit les points $I = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ et $J = \text{bary}\{(A, a'), (B, b'), (C, c')\}$. I et J sont différents puisque (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= (a + ka')\vec{MA} + (b + kb')\vec{MB} + (c + kc')\vec{MC} \\ &= a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} + k(a'\vec{MA} + b'\vec{MB} + c'\vec{MC}) = \vec{MI} + k\vec{MJ} \end{aligned}$$

$f(k)$ est sur la droite (IJ)

Réciproquement, si M est sur la droite (IJ) alors $M = \text{bary}\{(I, s), (J, 1-s)\} = \text{bary}\{(A, as+(1-s)a'), (B, bs+(1-s)b'), (C, cs+(1-s)c')\}$. Si $s \neq 0$ on trouve $k=(1-s)/s$ et par conséquent l'image de f est E privé du point J.

b) Si $(a, b, c) = m(a', b', c')$ alors I et J sont confondus. $f(k) = \text{bary}\{(A, (m+k)a'), (B, (m+k)b'), (C, (m+k)c')\}$ ici $t = -m$ et $f(k) = J$.

Exercice 7

a) $\Rightarrow$ b) Si I est le milieu de [A C] alors $\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI} = \vec{CD} + \vec{AI} = \vec{CD} + \vec{IC} = \vec{ID}$ (on utilise la relation de Chasles et la définition de parallélogramme).

b) $\Rightarrow$ c) Si I est le milieu de [A C] et de [B D] alors $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{IC} + \vec{DI} = \vec{DC}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID} = \vec{IC} + \vec{BI} = \vec{BC}$.

c) $\Rightarrow$ a) Si $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$, alors il existe des scalaires α et β tels que :

$$\vec{AB} = \alpha \vec{DC} \text{ et } \vec{BC} = \beta \vec{AD} \text{ ainsi, } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \alpha \vec{DC} + \beta \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

Ainsi, $(\alpha - 1)\vec{DC} = (1 - \beta)\vec{AD}$. Comme les points sont distincts et non alignés, $\alpha = 1 = \beta$.

Exercice 8

1) On a les relations :

$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \vec{BL} = \frac{2}{3}\vec{BC} \quad \vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$$

et par conséquent,

$I = \text{bary}\{(A, 2/3), (B, 1/3), (C, 0)\}$, $L = \text{bary}\{(A, 0), (B, 1/3), (C, 2/3)\}$, $K = \text{bary}\{(A, 0), (B, 2/3), (C, 1/3)\}$.

E est un point courant de la droite (IL) donc $E = \text{bary}\{(I, \alpha), (L, 1-\alpha)\} = \{(A, 2\alpha/3), (B, 1/3), (C, 2(1-\alpha)/3)\}$, α parcourant le corps des réels.

F est un point courant de la droite (KN) donc $F = \text{bary}\{(K, \beta), (N, 1-\beta)\} = \{(A, 2\beta/3), (B, 2(1-\beta)/3), (C, 1/3)\}$, β parcourant le corps des réels.

2) L'intersection des droites (IL) et (KN) est un point vérifiant les relations précédentes. On cherche donc α et β tels que:

$$2\alpha/3 = 2\beta/3 \text{ et } 1/3 = 2(1-\beta)/3 \text{ et } 2(1-\alpha)/3 = 1/3 \text{ soit } \alpha = \beta \text{ et } \beta = 1/2$$

Ainsi, on obtient le point $\text{bary}\{(A, 1/3), (B, 1/3), (C, 1/3)\}$, isobarycentre de A, B, C que l'on notera G.

3) De façon analogue on obtient, $J = \text{bary}\{(A, 1/3), (B, 2/3), (C, 0)\}$ et $M = \text{bary}\{(A, 1/3), (B, 0), (C, 2/3)\}$.

Le milieu de JM est $\text{bary}\{(J, 1/2), (M, 1/2)\} = \text{bary}\{(A, 2/3), (B, 2/3), (C, 2/3)\} = G$ par associativité des barycentres.

Ainsi G est sur les droites (JM), (IL) et (KN).

4) Les droites (IN) et (JM) sont parallèles à (BC), les droites (JK) et (IL) sont parallèles à (AC) et les droites (LM) et (KN) sont parallèles à (AB).

INKL est un parallélogramme et le milieu de KN est le milieu de IL.

IMJL est un parallélogramme et le milieu de IL est le milieu de JM.

Ainsi les droites (IL), (KN) et (JM) se coupent en un même point G'.

Le milieu de IL est $\text{bary}\{(I, 1/2), (L, 1/2)\} = \text{bary}\{(A, 2/3), (B, 2/3), (C, 2/3)\} = G = G'$.

Exercice 9

On remarque les points suivants :

$L = \text{bary}\{(A, 0), (B, 1), (C, -a)\}$, $M = \text{bary}\{(A, -b), (B, 0), (C, 1)\}$, $N = \text{bary}\{(A, 1), (B, -c), (C, 0)\}$

$L' = \text{bary}\{(A, 0), (C, 1), (B, -a)\}$, $M' = \text{bary}\{(A, 1), (B, 0), (C, -b)\}$, $N' = \text{bary}\{(A, -c), (B, 1), (C, 0)\}$

a) L, M, N sont alignés si et seulement si il existe deux scalaires d, e tels que $d+e = 1$ et $L = \text{bary}\{(M, d), (N, e)\}$.

Comme $\text{bary}\{(M, d), (N, e)\} = \text{bary}\{(A, -db/(1-b)+e/(1-c)), (B, -ec/(1-c)), (C, d/(1-b))\}$

On cherche d et e tels que $d+e=1$ et $-db(1-c)+e(1-b)=0$, $-ec=(1-c)/(1-a)$ et $d=-(1-b)a/(1-a)$

On obtient la condition $abc=1$.

Dans ce cas $e=-(1-c)/c(1-a)=b(c-1)/bc-1$ et $d=-(1-b)a/(1-a)=(b-1)/(bc-1)$.

b) On démontre de la même façon que L', M' et N' sont alignés.

c) On note I le milieu de AL, J le milieu de BM et K le milieu de CN, alors :

$$\begin{aligned} I &= \text{bary}\{(A, 1/2), (B, bc/2(bc-1)), (C, -1/2(bc-1))\}, \\ J &= \text{bary}\{(A, b/2(b-1)), (B, 1/2), (C, -1/2(b-1))\}, \\ K &= \text{bary}\{(A, -1/2(c-1)), (B, c/2(c-1)), (C, 1/2)\}. \end{aligned}$$

On obtient,

$$\vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CJ} = \vec{CJ} - \vec{CI} = \frac{b}{2(b-1)}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA} - \frac{bc}{2(bc-1)}\vec{CB} = \frac{1}{2(b-1)}\vec{CA} - \frac{1}{2(bc-1)}\vec{CB},$$

et de même,

$$\vec{L'M'} = \vec{CM'} - \vec{CL'} = \frac{1}{(b-1)}\vec{CA} - \frac{1}{(bc-1)}\vec{CB} = -2\vec{IJ}$$

Ainsi les droites (IJ) et (L'M') sont parallèles.

On démontre de même que (JK) et (M'N') sont parallèles .

Exercice 10

a) On utilise la relation de Chasles et les relations des barycentres, on obtient :

$$\vec{M_1M_4} = \vec{M_1B} + \vec{BM_4} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$

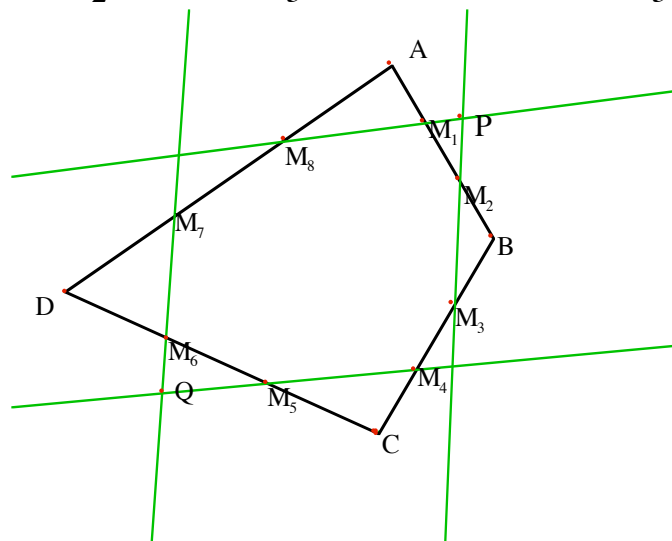
De façon analogue on montre que (M₁M₈) est parallèle à (BD) et (M₁M₃) est parallèle à (AC).

b) O étant l'intersection des diagonales, on a : $\vec{OC} = \alpha\vec{OA}$ et $\vec{OD} = \beta\vec{OB}$;
 $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{4}((1 + \alpha)\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB})$

Les droites (M₁M₈), (BD), (M₁M₃) et (AC) définissent un parallélogramme et par conséquent, $\vec{OP} = \frac{2}{3}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

Les droites (M₆M₇), (BD), (M₄M₅) et (AC) définissent un parallélogramme et par conséquent:

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \frac{2}{3}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{2}{3}(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}) \\ \vec{OK} &= \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ}) = \frac{1}{3}((1 + \alpha)\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB}) = \frac{4}{3}\vec{OG} \end{aligned}$$



c) On sait que le centre de gravité d'une plaque homogène triangulaire ABC coïncide avec l'isobarycentre.

On note G_1 l'isobarycentre des points A, B, C qui est le centre de gravité de ABC.

On note G_2 l'isobarycentre des points A, D, C qui est le centre de gravité de ADC.

On note G_3 l'isobarycentre des points A, B, D qui est le centre de gravité de ABD.

On note G_4 l'isobarycentre des points D, B, C qui est le centre de gravité de DBC.

Le centre de gravité de la plaque ABCD est sur la droite (G_1G_2) et (G_3G_4) puisque ABCD est l'union des plaques triangulaires ABC et ADC d'une part et de ABD et DBC d'autre part. Ainsi,

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}((1 + \alpha)\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\vec{OG}_2 = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OD} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}((1 + \alpha)\vec{OA} + \beta\vec{OB})$$

$$\vec{OG}_3 = \frac{1}{3}(\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB}) \text{ et } \vec{OG}_4 = \frac{1}{3}(\alpha\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB})$$

Si H est le centre de gravité alors $H = \text{bary}\{(G_1, x), (G_2, 1-x)\} = \text{bary}\{(G_3, y), (G_4, 1-y)\}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= x\vec{OG}_1 + (1-x)\vec{OG}_2 = \frac{1}{3}((1 + \alpha)\vec{OA} + (x + \beta - x\beta)\vec{OB}) \\ &= \frac{1}{3}((y + \alpha - \alpha y)\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB}) = \frac{1}{3}((1 + \alpha)\vec{OA} + (1 + \beta)\vec{OB}) \end{aligned}$$

Et $H = K$.

On notera que le centre de gravité de la plaque ne coïncide pas avec l'isobarycentre des sommets.

B

barycentres 8

C

centre de gravité 8
CHASLES 5

D

direction de l'espace affine 5

E

espace affine 5

I

isobarycentre 8

L

Leibniz 8

P

parallélogramme 10

S

segment 8

T

translation 6