Chapitre X- ETUDE GEOMETRIQUE DES CONIQUES

On se place naturellement dans le plan affine euclidien. Les trois courbes : ellipse, hyperbole et parabole peuvent être obtenues comme sections planes d'un cône de révolution et c'est pourquoi on les désigne sous le nom de conique. L'ellipse et l'hyperbole sont des coniques à centre, elles sont définies par la donnée de deux points appelés foyers et d'un réel 2a longueur de l'axe focal. La parabole n'est pas à centre, elle est définie à partir d'un foyer, d'une droite appelée directrice et d'un réel appelé excentricité.

Introduction, étude des coniques à centre.

Si F et F' sont deux points du plan, on note $2c = \|\overrightarrow{FF'}\|$ et si 2a est un réel donné, on considère la fonction f qui à un point M du plan associe le réel :
$f(M)= [(\|\overrightarrow{MF}\|+\|\overrightarrow{MF'}\|)^2 - 4a^2][(\|\overrightarrow{MF}\|-\|\overrightarrow{MF'}\|)^2 - 4a^2]$ et on cherche l'ensemble des points M du plan tels que f(M)=0.
On a la relation :

$$\left|\,\|\overrightarrow{MF}\|-\|\overrightarrow{MF'}\|\,\right| \le \|\overrightarrow{FF'}\| < \|\overrightarrow{MF}\|+\|\overrightarrow{MF'}\|$$ avec égalité si M est sur la droite (FF').

On distingue trois cas :

* Si a < c alors $2a < \|\overrightarrow{MF}\|+\|\overrightarrow{MF'}\|$ et f(M)=0 si et seulement si $\left|\,\|\overrightarrow{MF}\|-\|\overrightarrow{MF'}\|\,\right| = 2a$. L'ensemble des points tels que f(M) = 0 est appelé hyperbole.

* Si a > c alors $\left|\,\|\overrightarrow{MF}\|-\|\overrightarrow{MF'}\|\,\right| < 2a$ et f(M) = 0 si et seulement si $\|\overrightarrow{MF}\|+\|\overrightarrow{MF'}\|= 2a$. L'ensemble des points tels que f(M) = 0 est appelé ellipse.

* Si a = c l'ensemble des points tels que f(M) = 0 est la droite passant par F et F'.

On choisit le repère cartésien orthonormé défini par le milieu O de FF' et les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, avec $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{FF'}}{\|\overrightarrow{FF'}\|}$.
Si M est de coordonnées (x, y) dans le repère, un calcul simple donne $f(M)=16[(c^2-a^2)x^2-a^2y^2+a^2(a^2-c^2)]$ et ainsi, si $a \neq c$, $f(M) = 16(c^2-a^2)a^2\left[\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} -1\right]$.
Ainsi, si $a \neq c$, f(M) =0 si et seulement si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} = 0$, résultat qui donne l'équation de l'ellipse et de l'hyperbole, suivant les différents cas.

1) L'ellipse.

L'ellipse est l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante et notée 2a . Les points fixes, notés F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse.

* Si F et F' sont confondus l'ellipse est appelée cercle.

* La longueur $\| \overrightarrow{FF'} \| = 2c$ est la distance focale.

* $\| \overrightarrow{MF} \| + \| \overrightarrow{MF'} \| > \| \overrightarrow{FF'} \|$ entraîne que $a > c$

* Le rapport $c/a = e < 1$ est l'**excentricité.** (si $c = 0$, les foyers sont confondus, on a un cercle de rayon a, si $c = a$ l'ellipse se réduit au segment [FF']).

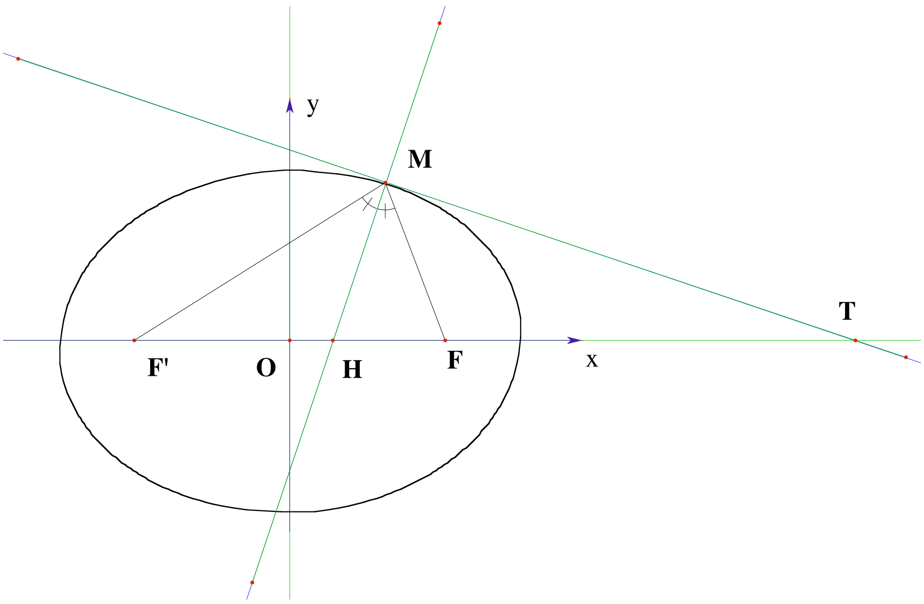
* Toute courbe semblable à une ellipse est une ellipse de même excentricité.

* L'ellipse est une courbe fermée qui partage le plan en deux régions : les points M tels que $\| \overrightarrow{MF} \| + \| \overrightarrow{MF'} \| > 2a$ sont les points extérieurs de l'ellipse, les points M tels que $\| \overrightarrow{MF} \| + \| \overrightarrow{MF'} \| < 2a$ sont les points intérieurs de l'ellipse, les foyers sont à l'intérieur de l'ellipse.

Equation de l'ellipse:

Soit un repère cartésien orthonormé d'origine O milieu de FF' et de premier vecteur $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{FF'}}{\|\overrightarrow{FF'}\|}$.

L'équation de l'ellipse dans ce repère est $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, on pose $a^2 = b^2 + c^2$.



* Ox est le grand axe ou axe focal.

* Ox et Oy sont des axes de symétrie donc O est centre de symétrie.

* Les sommets sont les points d'intersection de l'ellipse et de l'axe focal.

Equation paramétrique de l'ellipse x = acost et y = bsint.

* La tangente (MT) a pour équation (x/a) cost + (y/b)sint = 1.

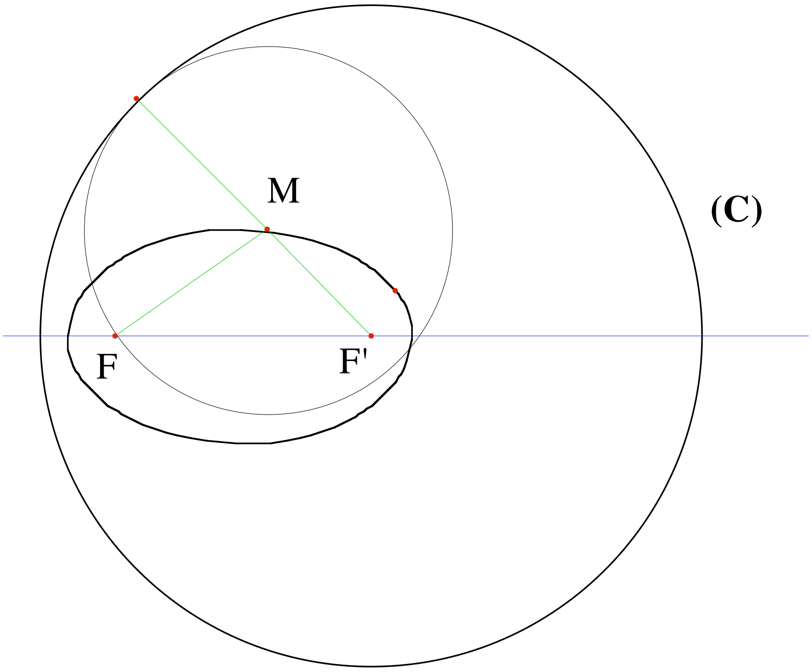
* La normale (MH) a pour équation axsint-bycost = c^2 sintcost.

* La tangente et la normale sont les bissectrices des droites (MF) et (MF').

Donnons des définitions équivalentes de l'ellipse.

Théorème: Etant donné un cercle (C) et un point fixe F intérieur à ce cercle, l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents au cercle (C) est une ellipse de foyer F et le centre du cercle (C) et de grand axe 2a =R (rayon du cercle (C))

Soit (E) une ellipse, de foyers F et F' et de grand axe 2a, soit (C) le cercle de centre F' et de rayon 2a (appelé cercle directeur). Alors si M est sur l'ellipse, le cercle de centre M passant par F est tangent à (C).
Réciproquement, considérons un cercle (C) de centre F' et de rayon 2a, et un point fixe F intérieur à l'ellipse, un cercle quelconque de centre M passant par F et tangent à (C) est tel que $\| \overrightarrow{MF} \| + \| \overrightarrow{MF} \| = 2a$ et M est sur l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe 2a (on notera qu'il y a deux cercles directeurs).



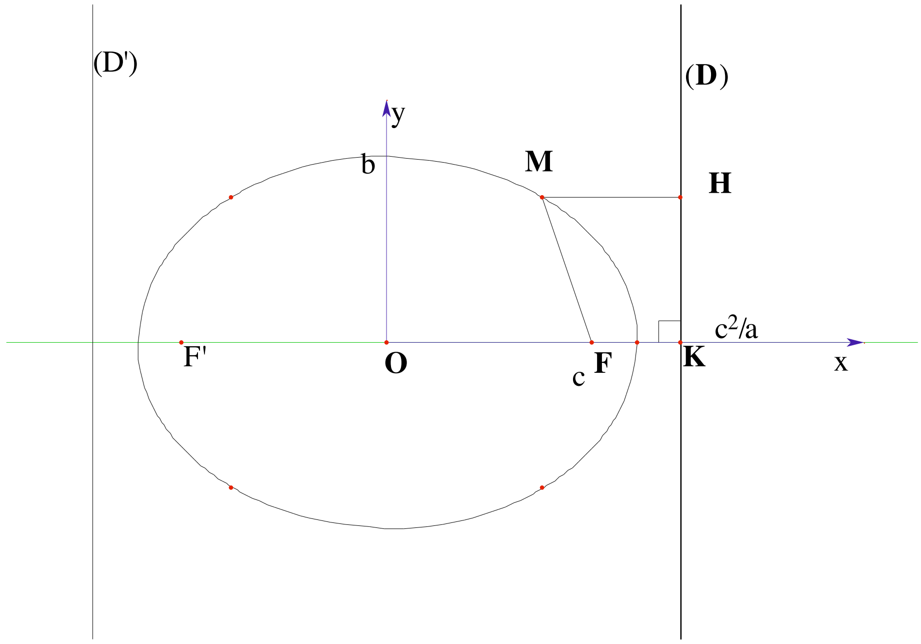
Théorème: Etant donné un point fixe F, une droite fixe (D) ne contenant pas F et un nombre constant e de [0 1[(e est l'excentricité) l'ensemble des points M dont le rapport des distances :

$$\frac{\|\vec{MF}\|}{d(M,D)} = e \text{ est une ellipse}$$

Soit (E) une ellipse, d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère cartésien orthonormé. Le foyer F est de coordonnées (c, 0) et on considère la droite (D) d'équation x= c^2/a. Alors, si M est un point de l'ellipse de coordonnées (x, y), $\|\vec{MF}\| = \frac{c}{a}\left|\frac{a^2}{c} - x\right|$ et d(M, D)= $\|\vec{MH}\| = \left|\frac{a^2}{c} - x\right|$ et le rapport est égal à l'excentricité.

Réciproquement, considérons une droite (D) , un point fixe F et un point M tel que $\frac{\|\vec{MF}\|}{d(M,D)} = e$. On considère le repère cartésien orthonormé (F, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) avec $\vec{e}_2$ vecteur directeur de (D). Si (x, y) sont les coordonnées de M dans le repère, et si x = k est l'équation de la droite (D), alors $x^2+y^2 = e^2 (x-k)^2$. Ainsi M est sur l'ellipse d'équation $(1-e^2)(x + \frac{ke^2}{1-e^2})^2 + y^2 = \frac{e^2k^2}{1-e^2}$.

On notera que la droite d'équation **x = c^2/a est la directrice associée au foyer F** . On peut de la même façon définir l'ellipse à partir du second foyer F' et d' une deuxième directrice d'équation x = - c^2/a.. Les deux directrices et les deux foyers sont symétriques par rapport au centre de la conique.



2) L'hyperbole

L'hyperbole est l'ensemble des points du plan dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes est constante et notée 2a . Les points fixes, notés F et F' sont appelés les foyers de l'hyperbole .

* La longueur $\|\overrightarrow{FF}\| = 2c$ est la distance focale.

* Lorsque $a^2 = c^2/2$ on dit que l'hyperbole est équilatère
* $|\ \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF}\|\ | < \|\overrightarrow{FF}\|$ entraîne que $a < c$

* Le rapport $c/a = e > 1$ est l'**excentricité.**

* Les sommets sont les points d’intersection de l’hyperbole et de l’axe focal.

* Toute courbe semblable à une hyperbole est une hyperbole de même excentricité.
* L’hyperbole partage le plan en trois régions :

les points M tels que, $|\ \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF}\|\ | < 2a$ sont les points extérieurs de l’ellipse (O est extérieur à l’hyperbole), les points M tels que $|\ \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF}\|\ | > 2a$ sont les points intérieurs de l’hyperbole et définissent deux régions.

Equation de l' hyperbole

Soit un repère orthonormé d'origine O milieu de FF' et de premier vecteur $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{FF}}{||\overrightarrow{FF}||}$

L'équation de l' hyperbole dans ce repère est $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 + b^2 = c^2$

* Ox est le grand axe ou axe focal.

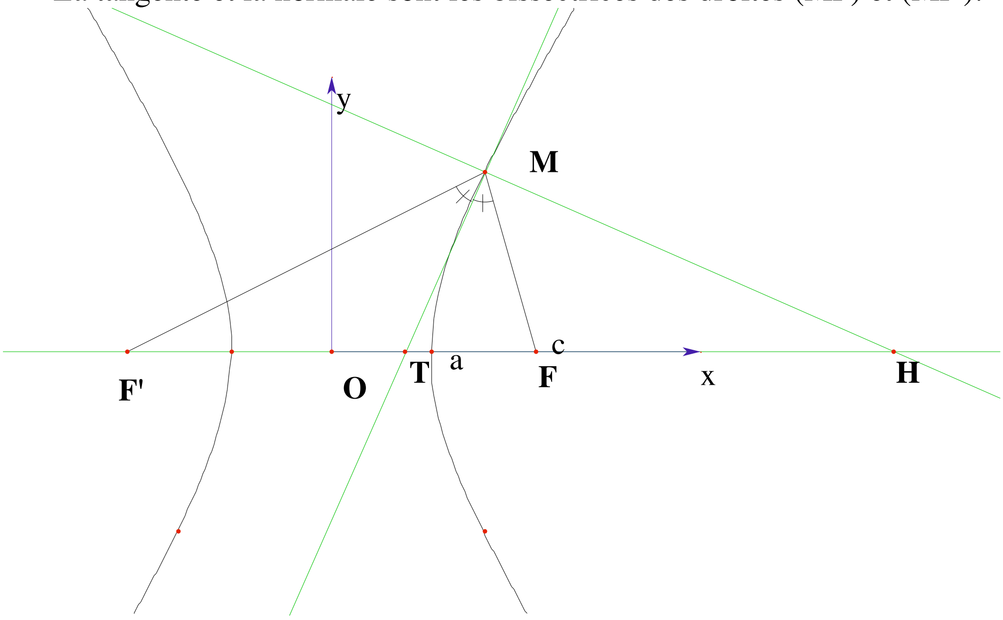
* Ox et Oy sont des axes de symétrie, donc O est centre de symétrie.

Equation paramétrique de l'hyperbole x = a/cost et y = b tan t

* La tangente (MT) a pour équation (x/a) - (y/b)sint = cos t.

* La normale (MH) a pour équation axsintcost + bycost = c^2 sint.

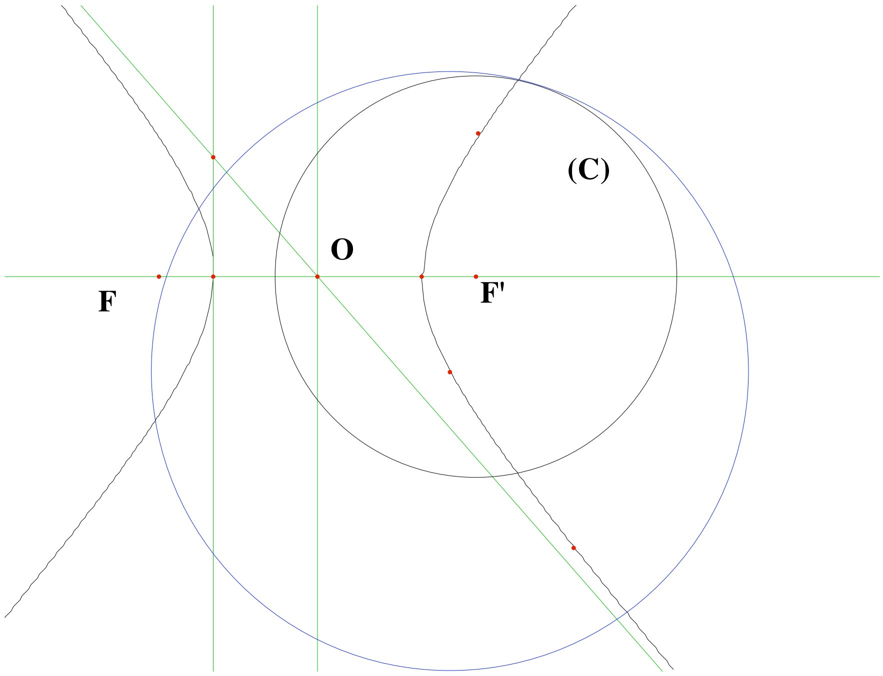
* La tangente et la normale sont les bissectrices des droites (MF) et (MF').



Donnons des définitions équivalentes de l'hyperbole.

Théorème: Etant donné un cercle (C) et un point fixe F extérieur à ce cercle, l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents au cercle (C) est une hyperbole de foyer F et le centre du cercle (C) et de grand axe 2a = R (rayon du cercle (C)).

Même démonstration que dans le cas de l'ellipse.



Théorème: Etant donné un point fixe F et une droite fixe (D) et un nombre constant e >1 (e est l'excentricité) l'ensemble des points M dont le rapport des distances,

$$\frac{\|\vec{MF}\|}{d(M,D)} = e$$ est une hyperbole.

Même démonstration que dans le cas de l'ellipse. On notera ici aussi que la droite d'équation **$x = c^2/a$ est la directrice associée au foyer F** . On peut de la même façon définir l'hyperbole à partir du second foyer F' et d'une deuxième directrice d'équation $x = - c^2/a$.. Les deux directrices et les deux foyers sont symétriques par rapport au centre de la conique.

3) La parabole.

La parabole n'est pas une conique à centre, elle est définie à partir d'un point et d'une droite.

Etant donné un point fixe F et une droite fixe (D), l'ensemble des points M dont le rapport des distances $\frac{\|\vec{MF}\|}{d(M,D)} = 1$ est une parabole (l'excentricité e = 1). La droite D est la directrice et F le foyer.

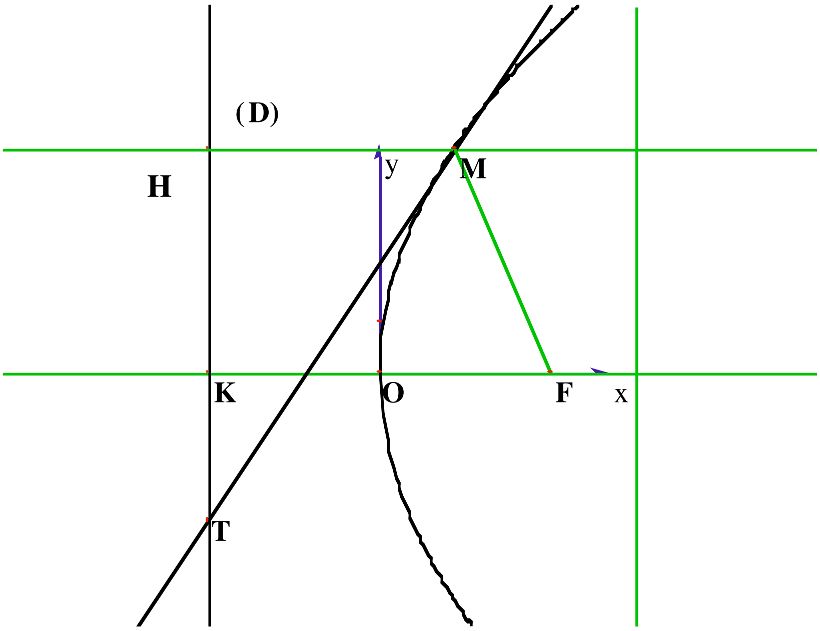
La distance d(F, D) = p est le paramètre de la parabole. On dit aussi que la parabole est l'ensemble des points du plan équidistants d'un point fixe et d'une droite fixe.

Equation de la parabole:

Soit un repère orthonormé d'origine O milieu de KF et de vecteurs $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{KF}}{\|\overrightarrow{KF}\|}$ et $\vec{e}_2$

.

L'équation de la parabole dans ce repère est $y^2 = 2px$ avec $p = \|\overrightarrow{KF}\|$.



* La droite (KF) est l' axe focal et est un axe de symétrie.

* Il n'y a pas de centre de symétrie.

* La tangente (MT) a pour équation $yY = p(X+x)$.

* La normale (MH) a pour équation $Y-y = -y / p(X-x)$.

* La tangente et la normale sont les bissectrices des droites (MF) et (MH).

* Le sommet est le point d'intersection de la parabole et de l'axe focal.

* La parabole partage le plan en deux régions ; les points M dont le rapport des distances, $\dfrac{\|\overrightarrow{MF}\|}{d(M,D)} < 1$ les points intérieurs de la parabole (F est intérieur à la parabole) ; les points M dont le rapport des distances $\dfrac{\|\overrightarrow{MF}\|}{d(M,D)} > 1$ sont les points extérieurs de la parabole.

Théorème: Etant donnés une droite (D) et un point fixe F non situé sur cette droite, l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents a la droite (D) est une parabole de foyer F et de directrice (D)

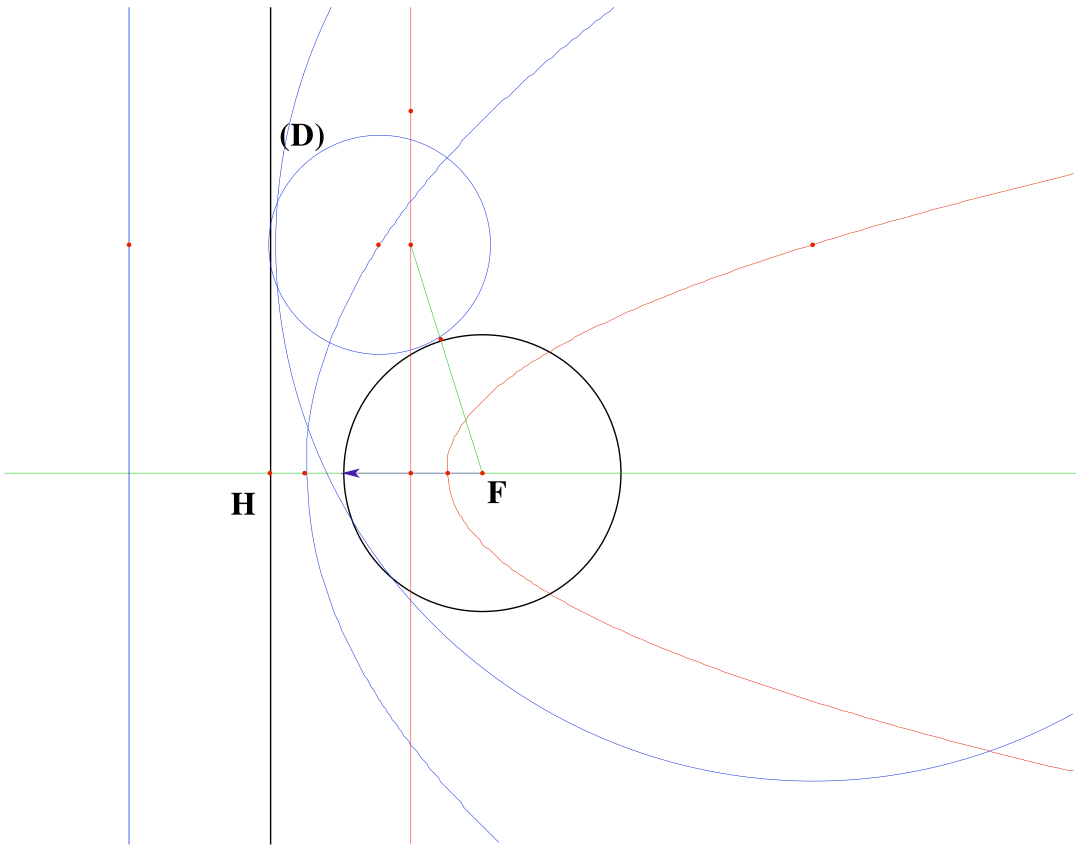
C’est une formulation différente de la définition puisque un cercle de centre M est tangent à (D) si et seulement si son rayon est égal à la distance de M à (D).

Théorème: Etant donné un cercle (C) et une droite (D), l'ensemble des centres des cercles tangents à la droite (D) et tangents au cercle (C) est composé en général de deux paraboles de foyer F centre du cercle (C).
Les directrices sont des droites parallèles à la droite (D)

On suppose que (C) est de centre F et de rayon R , on note H la projection de F sur (D) et $\vec{u} = \overrightarrow{FH}$.
Si M est le centre d’un cercle tangent à (C) et à (D) alors on a l’alternative :

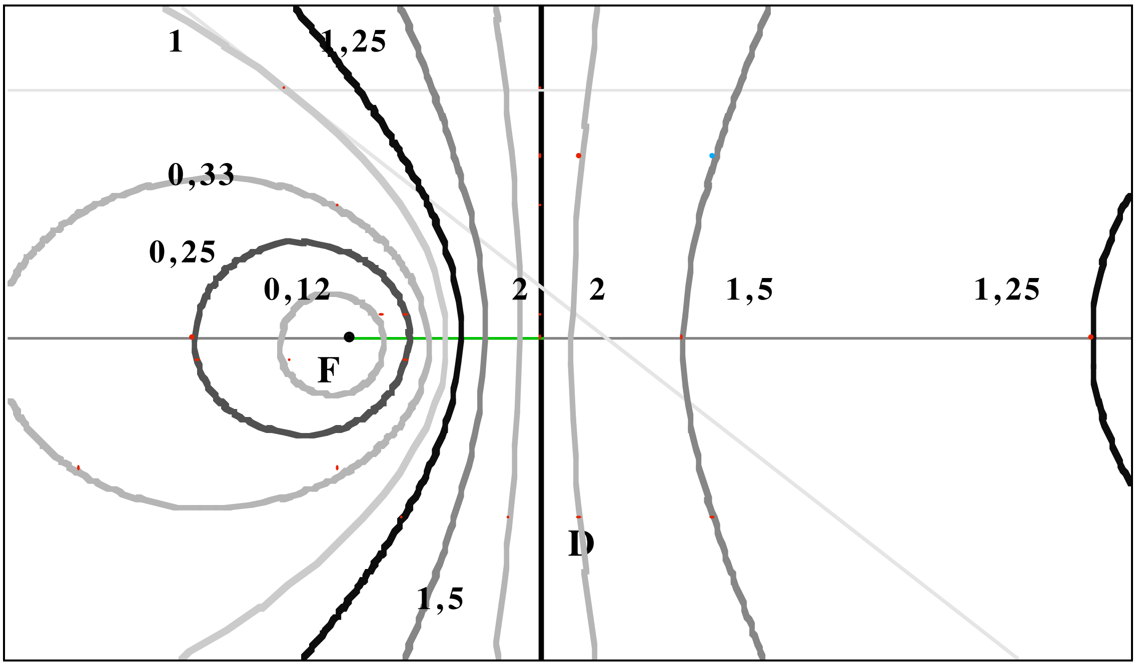
* Le cercle est tangent extérieurement au cercle (C) et dans ce cas la distance de M à D est égale à la distance de M à F moins R. Ainsi M est à égale distance de F et de la droite translatée de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}$.

* Le cercle est tangent intérieurement au cercle (C) et dans ce cas la distance de M à D est égale à la distance de M à F plus R. Ainsi M est à égale distance de F et de la droite translatée de (D) par la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Ainsi l’ensemble est composé de deux paraboles de foyer F et de directrices parallèles à (D).



On notera que si la droite (D) est tangente au cercle (C), dans le second cas, la directrice de la parabole passe par le foyer, la parabole est dégénérée en la droite passant par F et orthogonale à (D).

<u>Coniques définies par le foyer , la directrice et l'excentricité:</u>



On donne les différentes coniques, définies à partir de la directrice, du foyer et de l'excentricité e.
On peut noter que si e est plus petit que 1, on obtient une ellipse contenue dans le demi-plan définie par la directrice et contenant le foyer. Lorsque e tends vers 0, l'ellipse
Si e est plus grand que 1, on obtient une hyperbole. Lorsque e tends vers 1, une branche de l'hyperbole tends vers la parabole, l'autre tends vers l'infini l'ellipse dégénère en un point, le foyer.

4) Le théorème de Pascal.

Blaise Pascal (1623-1662) mathématicien, philosophe et physicien français.

Théorème : Soient six points distincts A, B, C, A', B', C' dont trois quelconques ne sont pas alignés. Alors il existe une conique unique non dégénérée passant par ces six points si et seulement si les points d'intersection des droites (BC') et (CB') , (BA') et (AB'), (AC') et (AB') sont alignés.(au sens large, voir chapitre V)

Les points A, B, C sont non alignés, et par conséquent $\mathcal{R}$ = (A, B, C) est un repère affine. On note ^{t}[a a' a″] , ^{t}[b b' b″] , ^{t}[c c' c″] , les matrices unicolonnes représentant respectivement les points A', B', et C' dans ce repère.
La condition « les points d'intersection des droites (BC') et (CB') , (BA') et (AB'), (AC') et (AB') sont alignés.(au sens large) » est celle du théorème de DESARGUES,

elle correspond au fait que les trois droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles ou concourantes, condition équivalente à :

$$\begin{vmatrix} bc & c'a & ab'' \\ cb' & c'a' & a''b' \\ c''b & c''a' & a''b'' \end{vmatrix} = 0$$

Une conique passant par les points A, B et C a pour équation dans le repère R :

$$2(\alpha yz+\beta xz+\chi xy) = 0 .$$

Cette conique passe par les points A', B', C' si et seulement si les scalaires α, β, χ sont solutions non identiquement nulle du système :

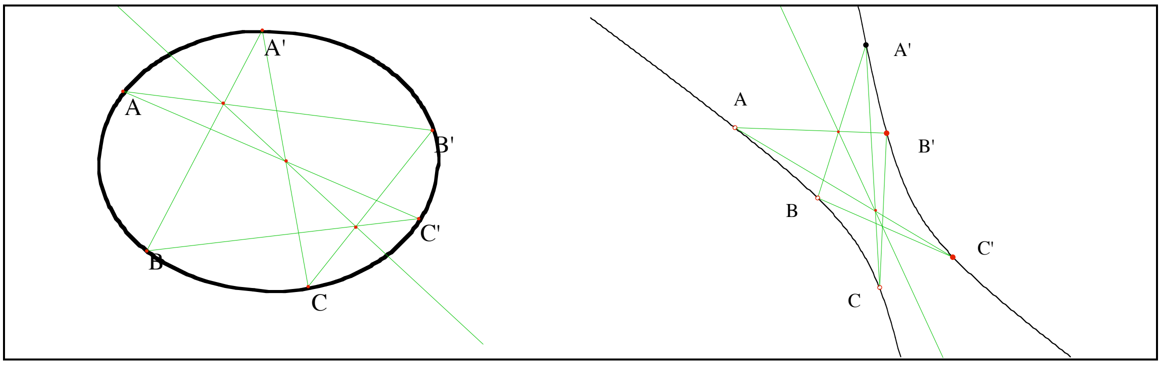
$$Xa''a'+Ya''a+Za'a = 0$$
$$Xb''b'+Yb''b+Zb'b = 0$$
$$Xc''c'+Yc''c+Zc'c = 0$$

Le déterminant de ce système est tel que :

$$\begin{vmatrix} a''a' & aa'' & aa' \\ b''b' & bb'' & bb' \\ c''c' & cc'' & cc' \end{vmatrix} = bcc'a'a''b'' \begin{vmatrix} 1 & a/a' & a/a'' \\ b'/b & 1 & b'/b'' \\ c''/c & c''/c' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & c'a & ab'' \\ cb' & c'a' & a''b' \\ c''b & c''a' & a''b'' \end{vmatrix}$$

Comme les points A, B, C, A', B', C' sont non alignés trois à trois , les composantes de A', B' et C' sont non nulles et le produit bcc'a'a″b″ est différent de 0.

Le système a une solution non identiquement nulle si le déterminant du système est nul. D'autre part, l'unicité vient du fait que le système est de rang deux.



Remarques :

1) Si on choisit 6 points sur un cercle, les points d'intersections des couples de côtés sont alignés (ce résultat fut trouvé par Blaise Pascal lorsqu'il avait 16 ans).

2) Lorsque cinq points de la conique sont donnés, le sixième est déterminé à partir des propriétés précédentes, ce qui permet de construire des points de la conique.

3) Réciproquement, cette même construction permet d'affirmer que par 5 points dont trois non alignés, passe une unique conique non dégénérée.

Exercices du chapitre X

Exercice 1

Dans le plan affine euclidien, on considère les points distincts F et M et un réel $a > 0$. Décrire l' ensemble des foyers F' et des centres O des ellipses Γ dont un foyer est F, passant par M et dont la distance des sommets de l'axe focal est $2a$.

Exercice 2

Montrer que la portion de tangente à une ellipse comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit.

Exercice 3

Dans le plan affine euclidien, un point M décrit une ellipse de foyers F et F'. Quel est l'ensemble des centres du cercle inscrit au triangle MFF' ?
Déterminer la courbe orthoptique de l'ellipse (ensemble des points d' où l'on voit l'ellipse sous un angle droit).

Exercice 4

Dans le plan affine euclidien, on considère deux droites distinctes (D) et (D') perpendiculaires et un cercle (C) tangent aux deux droites. Une tangente au cercle , variable coupe (D) en P et (D') en P'. Quel est l'ensemble des milieux de PP'?

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des projections d'un foyer d'une hyperbole Γ sur les tangentes à cette courbe est le cercle de diamètre $[A A']$ où A et A' désignent les sommets de Γ .
Ce cercle est appelé cercle principal de Γ .

Exercice 6

Etant donné une hyperbole (resp. une ellipse) de foyers F et F'. Si M est un point de l'hyperbole (resp. de l'ellipse), montrer que la tangente en M à l'hyperbole (resp. de l'ellipse), est bissectrice intérieure des droites (MF) et (MF'). Que peut-on dire de la normale ?

Exercice 7

Dans le plan affine euclidien , on considère un segment [AB] et une droite (D) non parallèle à la droite (AB). P est un point courant de (D) , la perpendiculaire en P à (D) et la perpendiculaire menée de A à (BP) se coupent en M.

a) Si le point A est sur (D) , quel est l'ensemble des points M ?

b) Lorsque A n'est pas sur (D), A se projette orthogonalement en un point K sur (D). En considérant une translation, quel est l'ensemble des points M?

Exercice 8

Soit Γ une parabole de foyer F et de directrice D .
Pour tout point M de Γ , on note H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que la tangente à la parabole en M est la médiatrice du segment [F H] .

Exercice 9

Construire le foyer et la directrice d'une parabole connaissant :

a) deux points M et M' tels que la droite (MM') passe par le foyer et soit parallèle à la directrice.
b) le foyer et deux tangentes.
c) le foyer, un point et la tangente en ce point.
d) le foyer, un point et une tangente.
e) la directrice et deux tangentes.
f) la tangente au sommet, un point et la tangente en ce point.

Exercice 10 *Représentation polaire des coniques .*

Soient une droite D, un point F non situé sur D et un nombre e > 0 . La conique (C) de directrice D et de foyer F et d'excentricité e est l'ensemble des points M du plan dont le rapport des distances au point F et à la droite D est égal à e. Suivant que e<1, e>1 ou e=1, cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

a) On considère le repère orthonormé d'origine F, et de second vecteur porté par D. Si d est la distance de F a D, montrer que l'équation en coordonnées polaires de la conique est :

$$\rho = -ed/ (1-e\cos \tau) \text{ ou } \rho = ed/ (1+e\cos \tau)$$

b) Montrer qu'une seule formule suffit pour représenter toute la conique lorsque τ varie entre 0 et 2π .

c) Réciproquement, si a, b, c et f sont des constantes données, montrer que toute courbe d'équation polaire:

$$\rho = a / (b+c \cos\tau+f\sin\tau)$$

est en général une conique dont l'origine du repère est un foyer et la directrice correspondante a pour équation $\rho = a / (c\cos\tau+f\sin\tau)$ et l'excentricité est $e = \dfrac{\sqrt{c^2 + f^2}}{|b|}$.

d)*Application* : Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la conique d'équation :

$$12x^2 + 16y^2 +12 ax -9a^2 = 0 \quad a>0$$

1) Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, de ses sommets, son excentricité.

2) Si M est sur la conique, calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M l'expression de la longueur $\|\vec{OM}\|$. Si on pose $\|\vec{OM}\| = \rho$ et mes$(\widehat{\vec{i}, \vec{OM}}) = \tau \mod[2\pi]$. Calculer ρ en fonction de τ.

Solutions des exercices du chapitre X

Exercice 1

Ensemble des foyers F'.
Analyse du problème : si Γ est une ellipse passant par M , de foyer F et dont la distance des sommets de l'axe focal est 2a , l'autre foyer F' vérifie la relation :

$$\|\overrightarrow{MF'}\| = 2a - \|\overrightarrow{MF}\|$$

Ainsi, on obtient une condition nécessaire $\|\overrightarrow{MF}\| < 2a$, F' est sur le cercle C_1 de centre M et de rayon 2a-$\|\overrightarrow{MF}\|$. D'autre part la condition $\|\overrightarrow{FF'}\| < 2a$ précise que F' n'est pas sur le cercle C_2 de centre F et de rayon 2a. Les cercles C_1 et C_2 sont tangents en un point A et par conséquent F' est sur le cercle C_1 privé du point A.

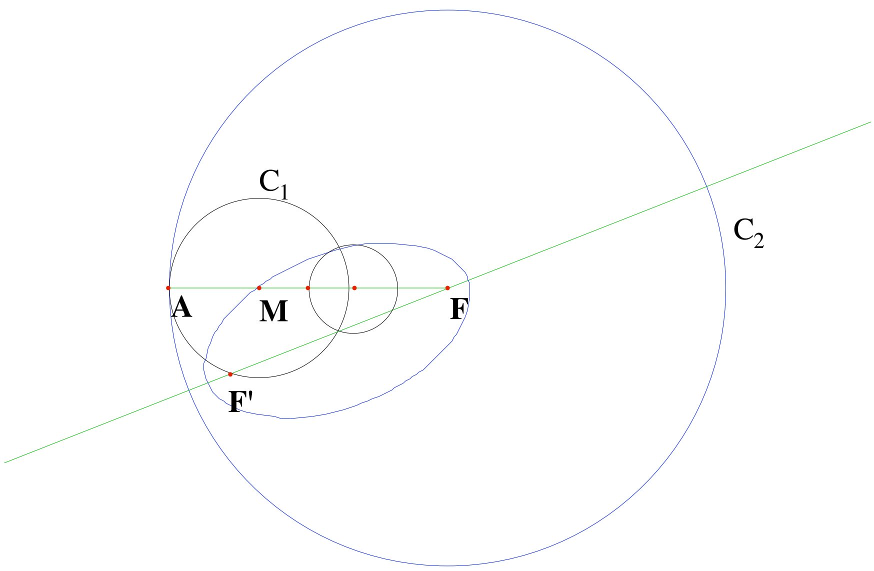
Réciproquement, si $\|\overrightarrow{MF}\| < 2a$ et si F' est sur le cercle de centre M et de rayon 2a-$\|\overrightarrow{MF}\|$, privé du point A, alors $\|\overrightarrow{MF'}\| + \|\overrightarrow{MF}\| = 2a$ et M est sur l'ellipse de foyer F et F' et dont la distance des sommets de l'axe focal est 2a.

En conclusion ,:

* Si $\|\overrightarrow{MF}\| \geq 2a$ l'ensemble est vide.
* Si $\|\overrightarrow{MF}\| < 2a$ l'ensemble est un cercle privé d'un point.

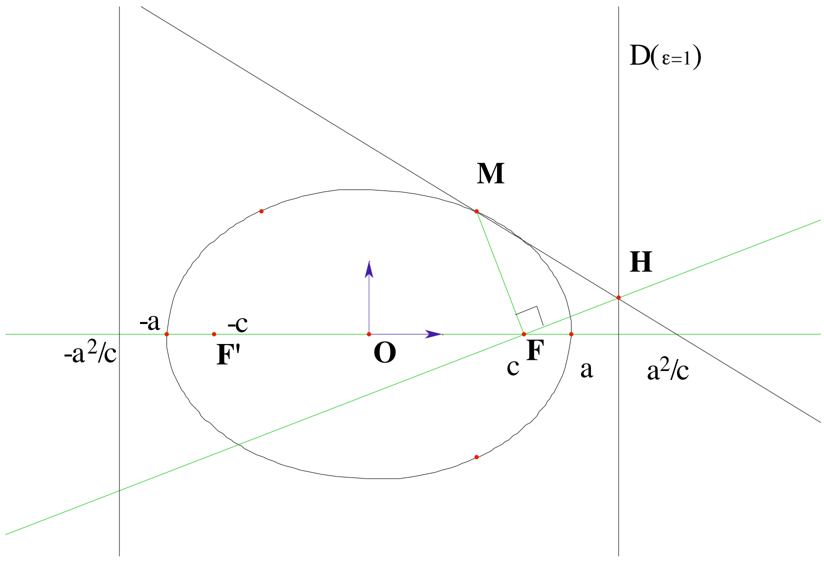
Ensemble des centres O.
O est le milieu de F F' et par conséquent O est homothétique de F' par une homothétie de centre F et de rapport 1/2. Ainsi :

* Si $\|\overrightarrow{MF}\| \geq 2a$ l'ensemble est vide.
* Si $\|\overrightarrow{MF}\| < 2a$ l'ensemble est un cercle privé d'un point.



Exercice 2

On considère une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec a >b , $c^2 = a^2-b^2$ et on pose ε=±1.
Les coordonnées des foyers sont (εc, 0) et les directrices sont d'équations $x = \varepsilon a^2/c$.
Si M(x, y) est un point de l'ellipse, le vecteur $\vec{FM}$ est de coordonnées (x-εc, y) , la tangente à l'ellipse passant par M est d'équation $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1$.



On suppose y ≠0 puisque dans le cas y=0, la tangente est parallèle à la directrice. On pose ε =±1, l'équation des directrices est $x = \varepsilon a^2/c$. La tangente coupe la directrice en un point H de coordonnées $(\varepsilon a^2/c, \frac{b^2(c-\varepsilon x)}{yc})$ et par conséquent le vecteur $\vec{FH}$ est de coordonnées $(-\varepsilon c+\varepsilon a^2/c, \frac{b^2(c-\varepsilon x)}{yc})$.

Le produit scalaire $(\vec{FM} \,/\, \vec{FH}) = (x-\varepsilon c)(-\varepsilon c+\varepsilon a^2/c)+y\frac{b^2(c-\varepsilon x)}{yc} = 0$.

Exercice 3

Ensemble des centres du cercle inscrit au triangle MFF' .

Le centre du cercle inscrit est l'intersection des bissectrices intérieures du triangle, le cercle inscrit est tangent aux trois côtés. On choisit un repère cartésien orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) avec O milieu de FF' et $\vec{i}$ vecteur directeur de la droite (FF'). Dans ce cas une équation paramétrique de l'ellipse (E) est x = acost, y = bsint .
Soit M(x, y) un point de l'ellipse avec y > 0 (le cas y < 0 sera obtenu par symétrie, la cas y=0 est exclu, le triangle est plat). Si on note comme dans le chapitre VI, S l'aire du triangle MFF' , r le rayon du cercle inscrit et p le périmètre, alors on a S = cbsint = pr/2=(a+c)r et ainsi r =(cbsint)/(a+c).
La normale en M à l'ellipse est bissectrice intérieure du triangle et son équation est $aX\sin t - bY\cos t = c^2\sin t\cos t$.
Le centre I du cercle circonscrit est sur la normale et la distance de I à la droite (FF') est r et c'est aussi l'ordonnée de I dans le repère.

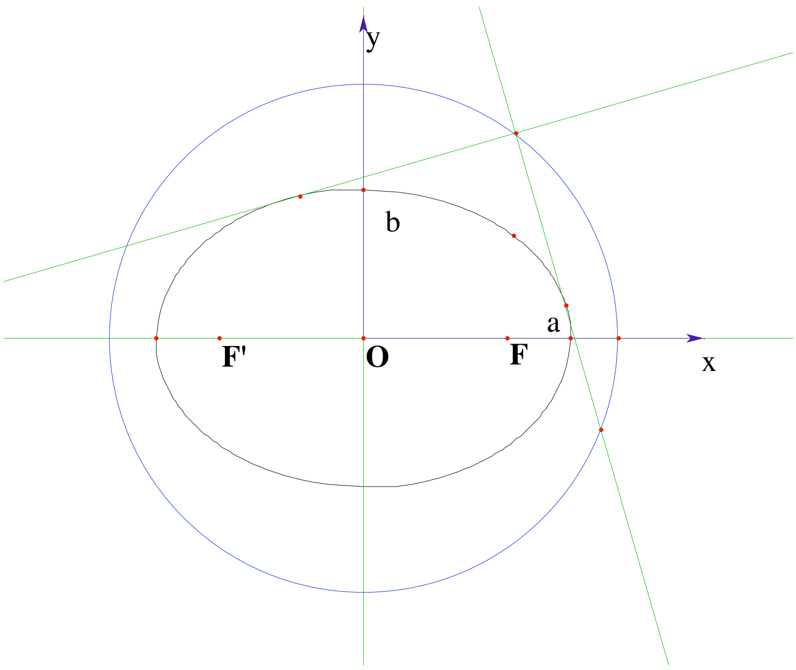
Ainsi les coordonnées de I sont (ccost, cbsint)/(a+c)) et I est sur l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{(a+c)^2y^2}{b^2c^2}=1.$$

Cette ellipse (E') a les mêmes axes et passe par les foyers de l'ellipse (E).
Lorsque M décrit (E) privée de ses sommets, I décrit (E') privée de ses sommets (qui sont les foyers de (E)).

Courbe orthoptique de l'ellipse.

Si (E) est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec a >b, par tout point M extérieur strictement à l'ellipse passe deux tangentes. On cherche l'ensemble des points M tels que les deux tangentes sont orthogonales.
Si M(x, y) est un point , une droite passant par M est d'équation Y-y = (X-x)k avec k coefficient directeur de la droite. Si N(α, β) est à l'intersection de l'ellipse et de la droite, alors : $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{(\alpha k-xk+y)^2}{b^2}=1$ et $\alpha^2(b^2+a^2k^2)+2\alpha k(y-xk)a^2+a^2[(y-xk)^2-b^2]=0$.
Ce trinôme en α a une solution double lorsque $k^2(a^2-x^2)+2kxy-y^2+b^2=0$. Lorsque M est extérieur strictement à l'ellipse, le trinôme en k adeux solutions qui sont les coefficients directeurs des deux tangentes en M. Les tangentes sont orthogonales si et seulement si le produit des coefficients directeurs est - 1 et par conséquent si $y^2-b^2=a^2-x^2$ soit $x^2+y^2=a^2+b^2$, équation d'un cercle centré en O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

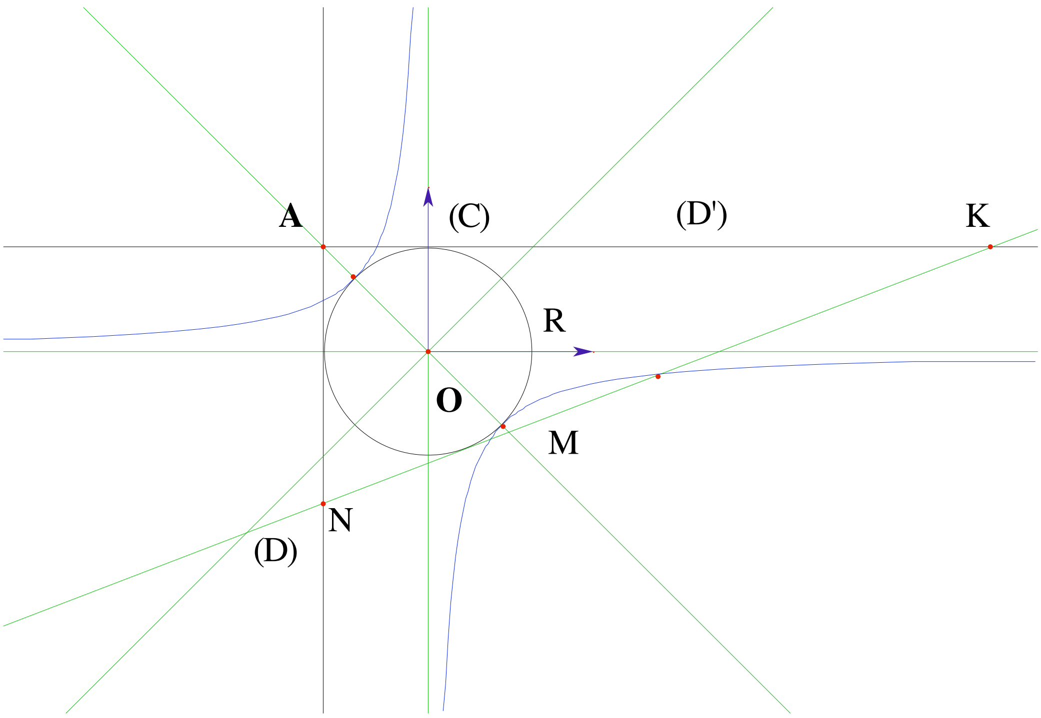


On peut remarquer que la courbe orthoptique de l'hyperbole s'obtient de la même façon et on obtient aussi un cercle ou l'ensemble vide.

Exercice 4

On choisit le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec O centre du cercle (C) de rayon R, $\vec{i},\vec{j}$ vecteurs directeurs des droites (D) et (D'). De telle façon que l'équation du cercle dans le repère soit $x^2+y^2=R^2$, l'équation de la droite (D) (resp. (D') soit y = R (resp. x = -R).

Si M(x, y) est un point du cercle, l'équation de la tangente en M est $xX+yY= R^2$.
La tangente en M coupe (D) en P de coordonnées $((R^2-Ry)/x, R))$ et (D') en P' de coordonnées $(-R, (R^2+Rx)/y)$ (on suppose que la tangente n'est pas parallèle à (D) et (D') ce qui correspond à $x\neq 0$ et $y\neq 0$).
Les coordonnées du milieu I(X, Y) de PP' sont $\left(\frac{R(R-x-y)}{2x}, \frac{R(R+x+y)}{2y}\right)$ et le produit des coordonnées $XY=-R^2/2$.
Ainsi, I est sur une hyperbole équilatère d'équation $xy = -R^2/2$, de centre O. Le grand axe est de vecteur directeur $\vec{i} - \vec{j}$, l'intersection A(-R, R) des droites (D) et (D') est un foyer de l'hyperbole. Noter que l'hyperbole est tangente au cercle.
Réciproquement, montrons qu' un point de l'hyperbole est un point de l'ensemble.
Si M(x, y) est un point de l'hyperbole alors $xy=-R^2/2$, le cercle de centre M passant par A(-R, R) est d'équation $(X-x)^2+(Y-y)^2 =(R+x)^2+(R-y)^2$, il coupe (D) en un point N(-R, -R+2y) et il coupe (D') en un point K(R+2x, R) et ainsi M est le milieu de NK. Montrons que la droite (NK) est tangente au cercle (C). La droite (NK) est d'équation $(X-x)(R-y)-(Y-y)(R+x) = 0$, la distance du point O à la droite (NK) est $\frac{|R(y-x-R)|}{\sqrt{(R-y)^2+(R+x)^2}} = R$.
Ainsi la droite (NK) est tangente au cercle (C) et M est le milieu de NK et par conséquent, l'ensemble cherché est l'hyperbole d'équation $xy = -R^2/2$.



Exercice 5

Démonstration analytique :
Etant donné une hyperbole, de foyers F et F', on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de façon que son équation soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $c^2 = b^2+a^2$ et $c > a$.

Si H(x, y) est un point du cercle principal, on a $x^2+y^2 = a^2$, on note $\varepsilon = \pm 1$ pour tenir compte des deux foyers.

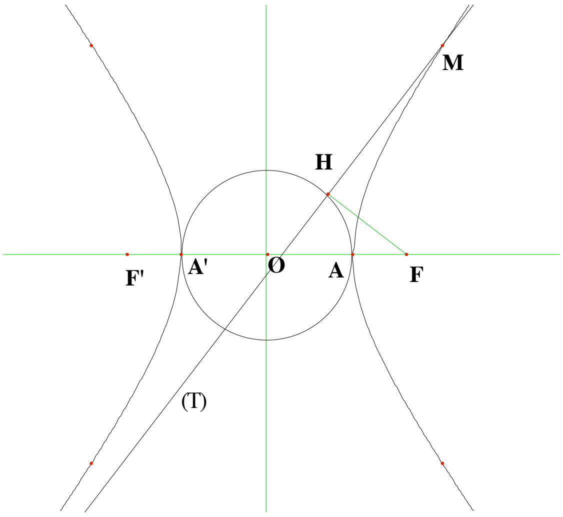
Le vecteur $\overrightarrow{FH}$ est de coordonnées $(x-\varepsilon c, y)$ et un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{FH}$ est $\vec{u}$ de coordonnées $(-y, x-\varepsilon c)$. Si on note (T) la perpendiculaire à (FH) passant par H, une équation paramétrique de (T) est $X = x-\lambda y$ et $Y=y+\lambda(x-\varepsilon c)$.
(T) est tangente à l'hyperbole si et seulement si le trinôme du second degré en λ, $\frac{(x-\lambda y)^2}{a^2} - \frac{(y+\lambda(x-\varepsilon c))^2}{b^2} = 1$ a une racine double.
Le discriminant du trinôme est $a^2b^2y^2(b^2+a^2-c^2)$ et par conséquent (T) est tangente à l'hyperbole.
Réciproquement, si M(x, y) est un point de l'hyperbole et $F(\varepsilon c, 0)$ un foyer, , la tangente en M à l'hyperbole a pour équation $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}$ $(y/b^2, x/a^2)$.

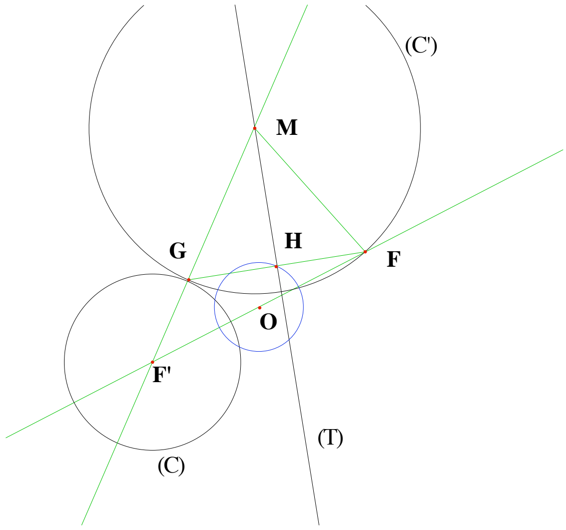
Si H (X, Y) est le projeté orthogonal de F sur la tangente, alors $\begin{cases} \frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{b^2}X + \frac{x}{a^2}Y = \frac{y\varepsilon c}{b^2} \end{cases}$.

Après simplification, on obtient $X = \frac{a^2(x+\varepsilon c)}{\varepsilon cx + a^2}$ et $Y = \frac{a^2 y}{\varepsilon cx + a^2}$.
Ainsi, $X^2+Y^2 = \frac{a^4(x^2+2\varepsilon cx + y^2)}{(\varepsilon cx + a^2)^2} = a^2$ puisque $a^2y^2=(c^2-a^2)x^2 - (c^2-a^2)a^2 = (c^2-a^2)(x^2-a^2)$.

Démonstration géométrique :

Une hyperbole est l'ensemble des centre des cercles passant par un foyer F et tangents a un cercle (C) de centre F' et de rayon 2a . F est extérieur au cercle directeur (C).
Si M est un point de l'hyperbole, M est centre d'un cercle (C') tangent à (C) et passant par F. La tangente à l'hyperbole (T) passant par M est bissectrice des droites (MF) et (MF') et par conséquent, la symétrie orthogonale autour de (T) transforme F en un point G commun à la droite (MF') et à (C) et ainsi G est l'intersection de (C) et de (C') .
Lorsque M décrit l'hyperbole, G décrit le cercle directeur. La projection H de F sur (T) est le milieu de FH et par conséquent H est l'homothétique de G par l'homothétie de centre F et de rapport 1/2.
Ainsi, H décrit le cercle homothétique du cercle directeur. Comme l'image de F' est O, H décrit le cercle principal.





Remarque: On peut faire une démonstration analogue dans le cas de l'ellipse a condition de remplacer la tangente par la normale. L'ensemble des projections des foyers sur la normale est aussi le cercle directeur.

Exercice 6

Etant donné une hyperbole, de foyers F et F', on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de façon que son équation paramétrique soit x = a/cost et y = btant avec $c^2=b^2+a^2$ et c > a. Si M est un point de l'hyperbole de coordonnées (x, y) , la tangente en M a pour équation X/a-(Y/b)sint=cost.

Le vecteur $\vec{MF}$ a pour coordonnées (c-a/cost, -btant) et le vecteur $\vec{MF}$ a pour coordonnées (-c-a/cost, -btant).

Ainsi, $\|\vec{MF}\|^2 = \dfrac{(c\cos t - a)^2 + b^2\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{(c - a\cos t)^2}{\cos^2 t}$ et de même $\|\vec{MF'}\|^2 = \dfrac{(c\cos t + a)^2 + b^2\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{(c + a\cos t)^2}{\cos^2 t}$.

Le vecteur de norme un porté par la droite (MF), $\vec{u} = \dfrac{\vec{MF}}{\|\vec{MF}\|}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{c\cos t - a}{c - a\cos t}, \dfrac{-b\sin t}{c - a\cos t}\right)$. Le vecteur de norme un porté par la droite (MF'), $\vec{v} = \dfrac{\vec{MF'}}{\|\vec{MF'}\|}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{c\cos t + a}{c + a\cos t}, \dfrac{-b\sin t}{c + a\cos t}\right)$.

On sait que le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est vecteur directeur de la bissectrice intérieure ses coordonnées sont $\left(\dfrac{-2ac\sin^2 t}{c^2 - a^2\cos^2 t}, \dfrac{-2bc\sin t}{c^2 - a^2\cos^2 t}\right)$ et ce vecteur est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a\sin t, b)$ vecteur directeur de la tangente .

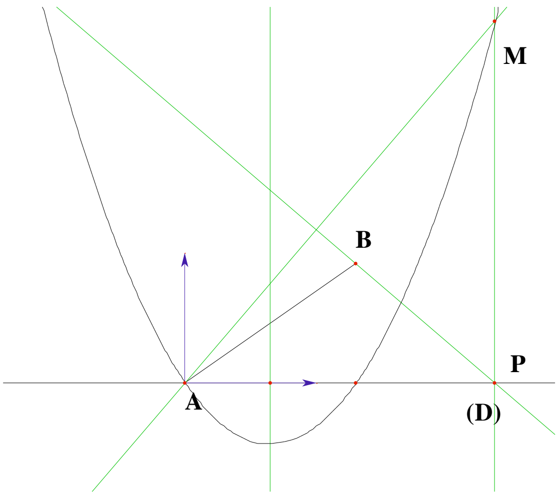
Ainsi, la tangente en M à l'hyperbole est bissectrice intérieure des droites (MF) et (MF'). Comme les bissectrices sont orthogonales, la normale est bissectrice extérieure des droites (MF) et (MF').

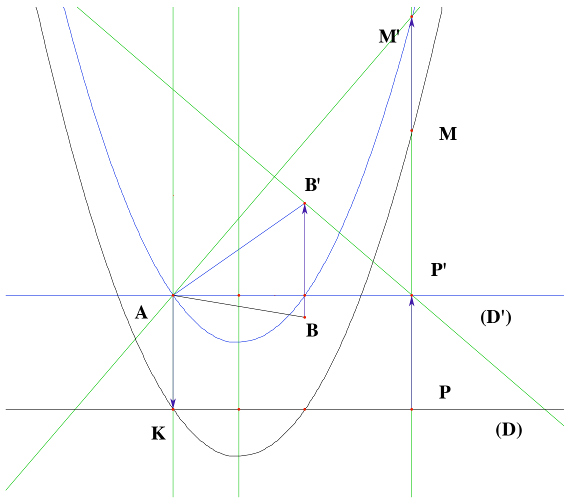
On démontre de façon identique, ce résultat lorsque on considère une ellipse.

Exercice 7

a) Si le point A est sur (D), on choisit le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i}$ vecteur directeur de la droite (D). Alors, la droite (D) a pour équation y = 0, le point B a pour coordonnées (b, c) avec c ≠ 0, le point P a pour coordonnées (α, 0) avec α paramètre réel.

Si M est de coordonnées (x, y) alors d'une part, $(\vec{PM}/\vec{i}) = 0$ et x = α, d'autre part $(\vec{AM}/\vec{BP}) = 0$ et x(α-b)-cy = 0 .Ainsi y = 1/c(α (α-b) et l'ensemble cherché est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que y = 1/c(x (x-b)=1/c(x-b/2)^2+b^2/4c.
C'est l'équation d'une parabole d'axe passant par le milieu de AB et orthogonal à (D), son foyer est de coordonnées (b/2, c/4-(b^2/4c)), sa directrice est d'équation y =- c/4-(b^2/4c).
b) Lorsque A n'est pas sur (D), A se projette orthogonalement en un point K sur (D). On considère la translation T de vecteur $\vec{KA}$. T transforme K en A, B en B', (D) en (D') et P en P' et de plus A est sur (D').
Lorsque P parcourt (D), P' parcourt (D') et la perpendiculaire en P à (D) est confondue avec la perpendiculaire en P' en (D'). D'autre part la perpendiculaire de A à (BP) se transforme en la perpendiculaire en B' à (B'P').
Ainsi on est ramené au cas précédent en remplaçant B par B' et (D) par (D'), on obtient une parabole (P) et l'ensemble des points M est T^{-1}(P) (translatée de la parabole par la translation de vecteur $\vec{AK}$) .



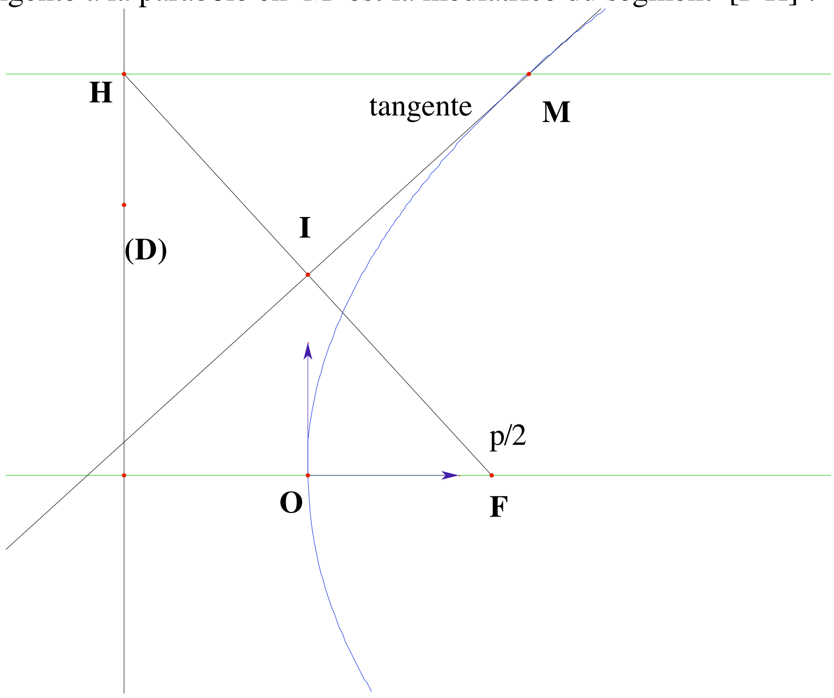


Exercice 8

On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de façon que l'équation de la parabole soit $y^2 = 2px$. Soit un point M de coordonnées (x, y), une équation paramétrique de la tangente à la parabole en M est X=x+t et Y=y+tp/y, un vecteur directeur de la tangente est $\vec{u}(1, p/y)$.
Les coordonnées du foyer F sont (p/2, 0), l'équation de la directrice est X=-p/2 et par conséquent les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur D sont (-p/2, y).

Ainsi, $\overrightarrow{HF}$ est de coordonnées (p, -y) et le milieu I de HF est de coordonnées (0, y/2) et par conséquent est sur la tangente (on pose t =-x)..

$(\overrightarrow{HF}/\vec{u})$ = p-yp/y =0 et la droite (HF) est orthogonale à la tangente.
Ainsi la tangente à la parabole en M est la médiatrice du segment [F H] .



Exercice 9

Les problèmes de construction à la règle et au compas sont résolus en deux temps. Le premier temps est consacré à l'analyse du problème ; on cherche des relations entre les éléments donnés et les éléments que l'on doit construire. Le deuxième temps est la construction à partir des données fournies par l'analyse. Eventuellement, on peut faire une discussion dans le cas où la construction n'est pas toujours possible.

a) *Analyse :*
On sait que l'axe de symétrie de la parabole passe par le foyer F et est orthogonal à la directrice. Par conséquent, F est le milieu de MM' et la distance de M à la directrice est
$\dfrac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{2}$.

Construction :
* On trace la médiatrice (Δ) de MM', elle coupe la droite (MM') en F; Δ est l'axe de symétrie de la parabole.
* Le cercle de centre F passant par M coupe Δ en deux points H_1 et H_2.
* La perpendiculaire à D passant par H_1 (resp. H_2) est la directrice.

Discussion :
On obtient toujours deux solutions, les deux paraboles sont symétriques par rapport à la droite (MM').

b) *Analyse :*
Si (T) est une tangente à la parabole, le symétrique du foyer par rapport à cette tangente est sur la directrice.

Le foyer F n'est pas sur la tangente.

Construction :
* On trace les symétriques du foyer par rapport aux deux tangentes, on obtient deux points.
* La directrice est la droite passant par ces deux points.

Discussion :
Si F est sur une des tangentes (T_1) ou (T_2), il n'y a pas de solution. Si (T_1) et (T_2), ne sont pas parallèles, il y a une seule solution. Si (T_1) et (T_2), sont parallèles, il n'y a pas de solution.

c) *Analyse :*
Le foyer F n'est pas sur la tangente. Si (T) est la tangente en M à la parabole, et si H est le projeté orthogonal de M sur la directrice (D), alors (T) est la médiatrice de FH et la droite (HM) est orthogonale à (D).

Construction :
* On trace le symétrique du foyer par rapport a la tangente, on obtient le point H.
* La directrice est la droite passant par H et orthogonale à (HM).

Discussion :
Si F est sur la tangente, il n'y a pas de solution, sinon il n'y a une seule solution.

d) *Analyse :*
Si (T) est une tangente à la parabole, le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente est sur la directrice. Le foyer F n'est pas sur la tangente.
Si M est un point de la parabole, le cercle (C) de centre M passant par F est tangent à la directrice.

Construction :
* On trace le symétrique du foyer par rapport a la tangente, on obtient un point de la directrice H.
* On trace le cercle (C) de centre M passant par F.
* La directrice est la droite passant par H et tangente au cercle.

Discussion :
Si F est sur la tangente, il n'y a pas de solution. Si H est à l'intérieur du cercle (C), il n'y a pas de solutions, sinon il y a une ou deux solutions.

e) *Analyse :*
Si (T) est une tangente à la parabole, la symétrique de la directrice (D) passe par le foyer F et (T) n'est pas orthogonale à (D). Les deux tangentes ne sont pas parallèles.

Construction :
* On trace les symétrique de la directrice par rapport au deux tangentes.
* Le foyer est à l'intersection des deux droites symétriques.

Discussion :

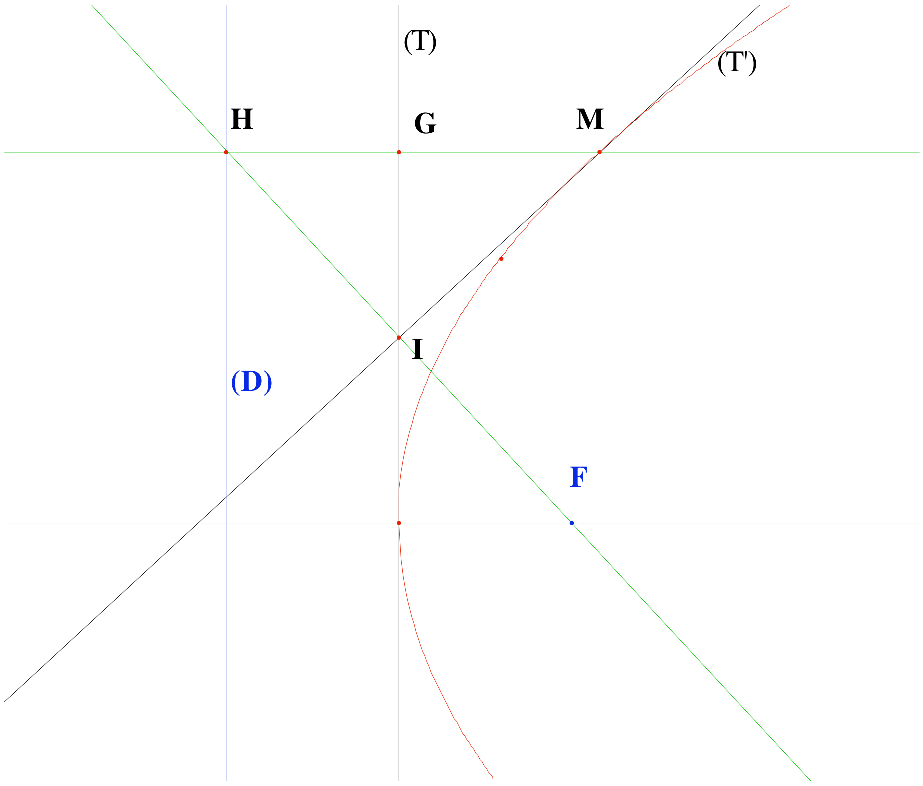
Si les deux tangentes sont parallèles ou orthogonales, il n’y a pas de solutions. Si une tangente est orthogonale à la directrice, il n’y a pas de solutions. Si les deux tangentes se coupent sur la directrice, il n’y a pas de solutions. Dans les autres cas il y a une solution unique.

f) la tangente au sommet, un point et la tangente en ce point.

Analyse :

Si (T) est la tangente au sommet de la parabole, (T) est parallèle à la directrice (D). Si M est un point de la parabole et (T’) la tangente en M, on note G la projection orthogonale de M sur (T) et H la projection orthogonale de M sur (D). Puisque (T’) est la médiatrice de HF, la symétrique orthogonale de la droite (MG) par rapport à (T’) passe par le foyer .

Si on note I le point d’intersection des deux tangentes, I est le milieu de HF et (MI) est la médiatrice de HF.



Construction :

* On trace la projection G de M sur (T).

* On trace la droite orthogonale à (T’) passant par I, elle coupe la droite (GM) en le point H.

* La directrice est la droite parallèle à (T) passant par H.

* Le foyer est le symétrique de H par rapport à I..

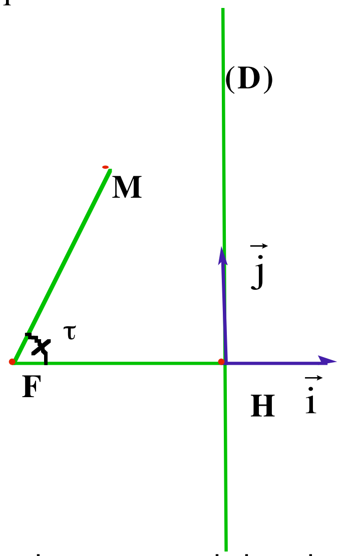
Discussion :

Si les deux tangentes sont parallèles ou orthogonales, il n’y a pas de solutions. Si le point M est à l’intersection des deux tangentes, il n’y a pas de solutions. Dans les autres cas il y a une solution.

Exercice 10

Représentation polaire des coniques :

a) Si R = $(F, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct avec $\vec{j}$ vecteur directeur de D, et si on note H la projection orthogonale de F sur D , $\vec{i} = \dfrac{\vec{FH}}{\|\vec{FH}\|}$. Si M est un point du plan, ses coordonnées sont ($\rho\cos\tau$, $\rho \sin\tau$) dans le repère avec $|\rho| = \|\vec{MF}\|$ et $\tau = H\hat{F}M$ mod $[2\pi]$. M est sur la conique si et seulement si $\|\vec{MF}\| = ed(M, D)$.



Comme $d(M, D) = |\rho\cos\tau - d|$, on obtient $|\rho| = e|\rho\cos\tau - d|$ et ainsi on obtient deux équations possibles :

$$\rho = -ed/ (1-e\cos \tau) \text{ et } \rho = ed/ (1+e\cos \tau)$$

b)On remarque que $-ed/ (1-e\cos(\tau+\pi))= -ed/ (1+e\cos \tau)$ et par conséquent si dans la première formule on remplace τ par $\tau+\pi$ et ρ par $-\rho$ on obtient la deuxième formule.
L'équation polaire de la conique s'écrit alors :

$$\rho = -ed/ (1-e\cos \tau) \text{ ou } \rho = ed/ (1+e\cos \tau)$$

On remarque que l'équation polaire de la directrice est $\rho = d/\cos\tau$.
c) Si a, b, c et f sont des constantes données, et si (C) est une courbe d'équation polaire $\rho = a / (b+c \cos\tau+f\sin\tau)$, on pose $c \cos\tau+f\sin\tau = \sqrt{c^2 + f^2} \cos(\tau-\alpha)$ (ce qui revient à faire à une rotation de l'axe polaire d'angle α autour de l'origine) et par conséquent l'équation devient $\rho = \dfrac{a/b}{1+\dfrac{\sqrt{c^2+f^2}}{b}\cos(\tau-\alpha)}$.

* Si $a > 0$ et $b > 0$ on pose $e = \dfrac{\sqrt{c^2 + f^2}}{|b|}$ et $ed=a/b$ et par conséquent $d=a/eb$. On obtient l'équation d'une conique dont l'origine du repère est un foyer, d'excentricité est e et la directrice correspondante a pour équation $\rho = d / \cos(\tau-\alpha) =a/ (c\cos\tau+f\sin\tau)$.

* Si $a > 0$ et $b < 0$ on pose $e = \dfrac{\sqrt{c^2 + f^2}}{|b|}$ et $ed=a/|b|$ et par conséquent $d=a/e|b|$. On obtient l'équation d'une conique dont l'origine du repère est un foyer, d'excentricité est e et la directrice correspondante a pour équation $\rho = d / \cos(\tau-\alpha) =a/ (c\cos\tau+f\sin\tau)$.

* Si $a < 0$ on se ramène au cas précédent en faisant une symétrie par rapport à l'origine.

d) 1)$12x^2 + 16y^2 +12 ax -9a^2 = 12(x+a/2)^2+16y^2-12a^2 = 0$ et l'équation devient :

$$\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{a^2}+\frac{4}{3a^2}y^2=1$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre (-a/2, 0), de foyers (-a, 0) et (0, 0), de sommets (a/2, 0) et (-3a/2, 0) et d'excentricité 1/2.

2)Si M(x, y) est sur la conique, $x=\rho\cos\tau$ et $\rho=(3a-x)/4$ puisque $-3a/2 \le x \le a/2$. Ainsi, on obtient l'équation polaire de l'ellipse $\rho = \dfrac{3a}{2(2+\cos\tau)}$.
