Chapitre XI- LA SPHERE ET L'INVERSION

On étudie certaines propriétés de la sphère et du cercle et une transformation non affine , l'inversion qui entre autre transforme les hyperplans en sphères. On a choisi de se placer dans le cadre général, l'espace affine euclidien est supposé de dimension n. Ainsi, lorsque n = 2, on a les résultats sur le cercle et les hyperplans considérés sont des droites, lorsque n=3 , on a les résultats sur la sphère et les hyperplans considérés sont des plans

1) La sphère

Si E est un espaces affine euclidien de dimension n, A un point de E, et r un réel positif, on appelle sphère de **centre A et de rayon r** l'ensemble des points m de E tels que d(A, m) = r.
La sphère est notée S(A, r) et on remarque que si r = 0, elle est réduite au point A, lorsque n = 2, dans le plan affine euclidien, la sphère est appelée cercle.
Si on choisit un repère orthonormé R = $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n)$ l'équation de la sphère dans le repère est :

$$\sum_{i=1}^{i=n}(a_i - x_i)^2 = r^2$$

où les a_i sont les coordonnées du point A et les x_i les coordonnées d'un point courant de la sphère dans le repère R.

Proposition : Une droite affine coupe une sphère en au plus deux points. Si elle coupe la sphère en un point, on dit qu'elle est tangente à la sphère.

En effet la recherche d'un point de l'intersection de la droite et de la sphère se ramène à une équation du second degré et ainsi, soit l'équation n'a pas de racines et la droite ne coupe pas la sphère, soit l'équation a une racine double et la droite est tangente à la sphère soit l'équation a deux racines et la droite coupe la sphère en deux points.

Plus précisément, si D est une droite et S(A, r) une sphère, on note d la distance de D au centre de la sphère A. Si $d<r$ la droite coupe la sphère en deux points, si d = r la droite est tangente à la sphère, si $d>r$ la droite ne coupe pas la sphère.

Proposition: L'intersection d'un plan affine et d'une sphère est soit vide, soit un cercle. Si le cercle est réduit à un point, on dit que le plan est tangent à la sphère.

En effet , on choisit un repère orthonormé formé d'un point du plan et dont les deux premiers vecteurs dirigent le plan. Dans ce repère l'équation de l'intersection du plan et de la sphère se ramène à l'équation d'un cercle dans le plan.

On a des résultats analogues au cas précédent : si d est la distance du centre de la sphère au plan et r le rayon de la sphère, on distingue trois cas :

* Si $d < r$ le plan coupe la sphère en un cercle.
* Si $d = r$ le plan est tangent à la sphère.
* Si $d > r$ le plan ne coupe pas la sphère.

A) Puissance d'un point par rapport à une sphère.

Etant donnée une sphère d'un espace affine euclidien, on définit l'application, notée P qui à un point M de E associe un réel P(M) défini de la façon suivante :

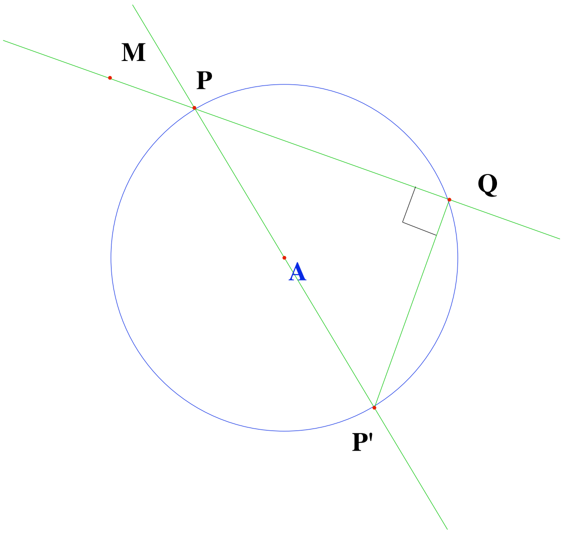
Définition: Si S(A, r) est une sphère et M un point de E, on appelle puissance du point M par rapport à la sphère le nombre $P(M) = d(A, M)^2 - r^2$.

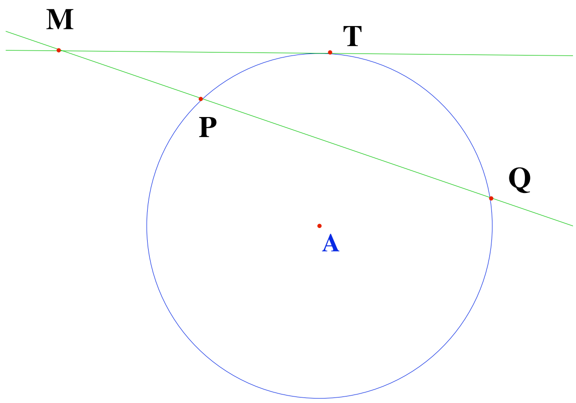
$d(A, M) = \|\vec{AM}\|$ est la distance du point M au centre de la sphère. On peut noter que la puissance est positive si M est extérieur à la sphère , nulle si M est sur la sphère et négative si M est intérieur à la sphère.

On a les résultats suivants :

* Si D est une droite passant par M , coupant la sphère S(A, r) en deux points P et Q, alors $(\vec{MP}/\vec{MQ}) = P(M)$.

En effet, dans le plan contenant MPA, la droite (AP) coupe la sphère au point .P' . Le théorème de la médiane permet d'écrire: $(\vec{PQ}/\vec{P'Q}) = 0$ et par conséquent $(\vec{MP}/\vec{MQ}) = (\vec{MP}/\vec{MP'} + \vec{P'Q}) = (\vec{MP}/\vec{MP'}) = (\vec{MA} + \vec{AP}/\vec{MA} - \vec{AP})$
$=(\vec{MA}/\vec{MA}) - (\vec{AP}/\vec{AP}) = P(M)$.





* Si D est une droite passant par M , coupant la sphère en un point, D est tangente à la sphère en un point T, alors on montre de façon analogue que : $(\vec{MT}/\vec{MT}) = P(M)$.

Théorème de l'arc capable: On se place dans le plan affine euclidien et on considère deux points distincts A, B et un nombre réel $\alpha \in [0, \pi]$.
On note Ω l'ensemble des points M du plan tels que l'écart angulaire $\widehat{AMB} = \alpha$.
Alors:
* Si $\alpha = 0$ ou π , Ω est sur la droite (A, B)
* Sinon Ω est constitué de deux portions de cercle

* Si $\alpha = 0$ alors $(\vec{MA}/\vec{MB}) = \|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|$ et M est sur la droite (AB) et à l'extérieur du segment ainsi $\Omega = (AB) - [A\,B]$.

* Si $\alpha = \pi$ alors $(\vec{MA}/\vec{MB}) = -\|\vec{MA}\| \times \|\vec{MB}\|$ M est sur la droite (AB) et à l'intérieur du segment ainsi $\Omega =]A\,B[$.

* Si $\alpha \in]0, \pi[$ on considère le repère cartésien orthonormé $(I, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \dfrac{\vec{AB}}{a}$ défini par le milieu I de AB et un vecteur porté par (AB), a est supposé positif.

Dans ce repère, les coordonnées de A sont (-a,0), de B sont (a,0) ,de M sont (x, y), et la condition $\widehat{AMB} = \alpha$, s'écrit:

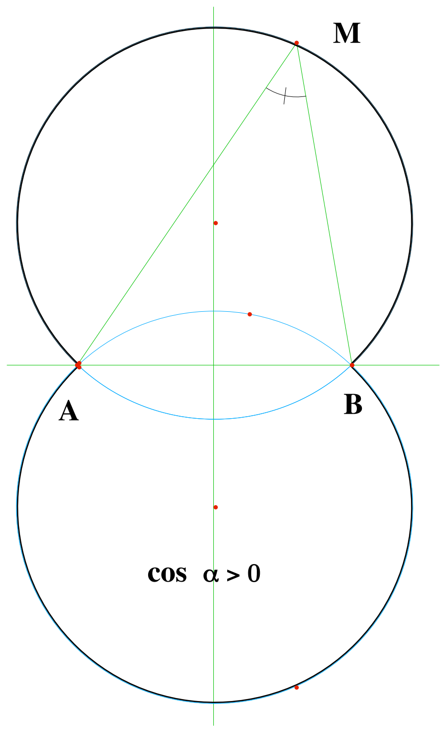
$$\cos(\alpha) = \frac{x^2 - a^2 + y^2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

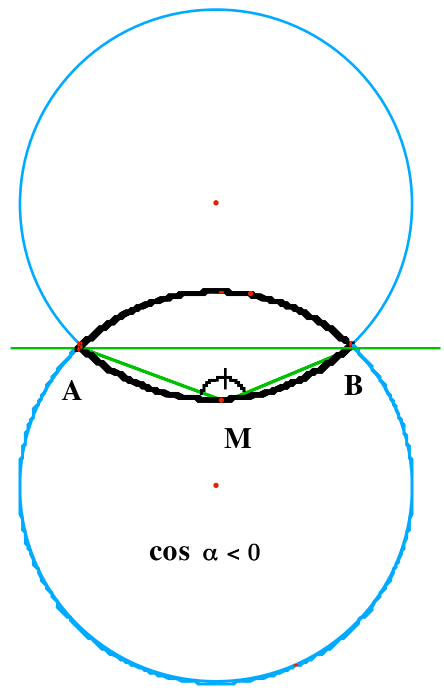
En élevant l'expression précédente au carré et en développant, on obtient :

$$[x^2 + (y - \frac{a}{\tan\alpha})^2 - \frac{a^2}{\cos\alpha^2}][(x^2 + (y + \frac{a}{\tan\alpha})^2 - \frac{a^2}{\cos\alpha^2}] = 0$$

Soit l'équation de deux cercles passant par A et B .

Réciproquement, si $\cos(\alpha) > 0$ alors M est sur une des deux portions de cercle extérieure au segment [AB] et si $\cos(\alpha) < 0$ alors M est sur une des deux portions de cercle intérieure au segment [AB].





D'autre part, si O est le centre de l'un des cercles, alors :

$$(\vec{OA}/\vec{OB}) = -a^2 + \frac{a^2}{\tan^2\alpha} = a^2\left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

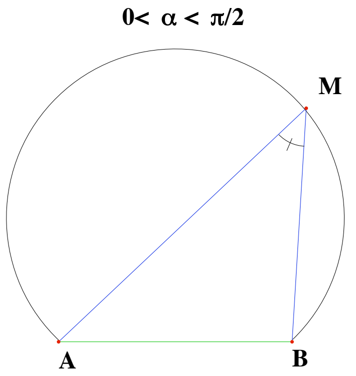
Ainsi, $\cos(\widehat{AOB}) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ et par conséquent:

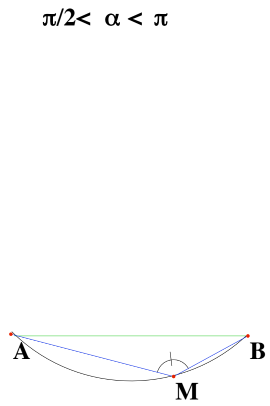
$$\begin{cases} \widehat{AOB} = 2\alpha\,, & \text{si} \quad \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \widehat{AOB} = 2\alpha - \pi, & \text{si} \quad \alpha > \dfrac{\pi}{2} \\ \widehat{AOB} = \pi, & \text{si} \quad \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Remarque :

Lorsque le plan affine euclidien est orienté, $\alpha \in [0, 2\pi]$ et Ω' l'ensemble des points M du plan tels que une mesure de l' angle orienté $\widehat{AMB} = \alpha \mod[2\pi]$. Alors:

- * Si $\alpha = 0$, Ω' est constitué des deux segments (AB) -]A B[.
- * Si $\alpha = \pi$, Ω' est le segment]A B[.
- * Sinon Ω' est constitué d'une portion de cercle





Théorème de cocyclicité: On se place dans le plan affine euclidien et on considère quatre points distincts non alignés: A, B, C et D. On peut supposer par exemple que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point M. Alors:

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $(\overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MC}/\overrightarrow{MD})$

Si A, B, C et D sont non alignés, ils constituent une famille affinement génératrice et par conséquent on peut extraire de cette famille un repère affine. D'autre part, parmi les droites obtenues à partir de deux points , il y a au moins un couple de droites qui se coupent et par conséquent, on peut supposer que par exemple que les droites (AB) et (C D) se coupent en un point M.

* Si A, B, C, D sont cocycliques alors on écrit la puissance du point M par rapport au cercle contenant les points et on obtient le résultat.

* Si $(\overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MC}/\overrightarrow{MD})$, on considère le cercle passant par A, B et C . Ce cercle existe et est unique puisque (A, B, C) est un repère affine. La droite (CM) coupe le cercle en un point D' et $(\overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MC}/\overrightarrow{MD'}) = (\overrightarrow{MC}/\overrightarrow{MD})$.

Ainsi D = D' et les points sont cocycliques.

On notera que dans ces conditions les relations sur les écarts angulaires sont :

$$A\widehat{C}B = A\widehat{D}B \quad \text{ou} \quad A\widehat{C}B = \pi - A\widehat{D}B$$

B)Hyperplan radical de deux sphères

On suppose que E est un espace affine euclidien de dimension n. On considère deux sphères notées S(A, r) et S(A', r'), de centres respectivement A et A' et de rayon r et r'. Que peut on dire de l'ensemble des points M de E ayant même puissance par rapport aux deux sphères ?

On a le résultat suivant :

Théorème : Si $A \neq A'$ et si on note P(M) la puissance du point M par rapport à S(A, r) et P'(M) la puissance du point M par rapport à S(A', r') alors :

$$\Omega = \{ M \in E \ / \ P(M) = P'(M) \}$$

est un hyperplan affine orthogonal à la droite (AA').
Cet hyperplan est appelé **l'hyperplan radical** des deux sphères.
Dans le plan affine euclidien on dira **axe radical** des deux cercles.

La relation P(M) = P'(M) s'écrit $\|\vec{MA}\|^2 - r^2 = \|\vec{MA'}\|^2 - r'^2$ et par conséquent, on obtient $(\vec{MA} + \vec{MA'} \ / \ \vec{AA'}) = r'^2 - r^2$.
Si on se place sur la droite (A A') et si on pose $\vec{AA'} = d\,\vec{e}$ avec $d = \|\vec{AA'}\|$ la condition précédente s'écrit $(1 + \frac{r'^2 - r^2}{d^2})\vec{MA} + (1 - \frac{r'^2 - r^2}{d^2})\vec{MA'} = 0$.

Ainsi il existe un unique point de Ω sur la droite (AA') noté M_0 barycentre des points A et A' .

Montrons que Ω est l'hyperplan affine passant par M_0 et orthogonal à la droite (AA').

* Si M est dans l'hyperplan affine, il se projette orthogonalement sur la droite (A A') en M_0 .Ainsi, $(\vec{MA} + \vec{MA'} \ / \ \vec{AA'}) = (\vec{M_0A} + \vec{M_0A'} \ / \ \vec{AA'}) = r'^2 - r^2$ et M est dans Ω.

* Si M est dans Ω, on projette orthogonalement M sur la droite (A, A') alors si H est la projection, on a :

$$(\vec{MA} + \vec{MA'} \ / \ \vec{AA'}) = r'^2 - r^2 = (\vec{HA} + \vec{HA'} \ / \ \vec{AA'})$$

Ainsi H= M_0 et M est dans l'hyperplan.

On notera que si A = A' alors on a l'alternative :
* Si r = r' , $\Omega = E$
* Si $r \neq r'$, $\Omega = \emptyset$.

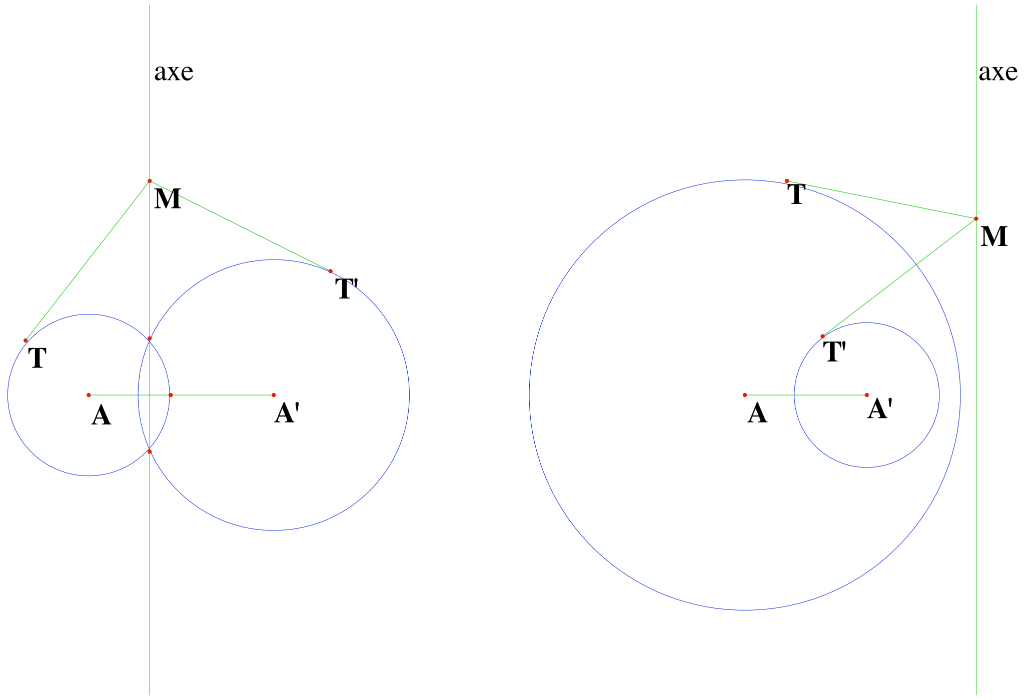
Propriétés de l'hyperplan radical :

1) L' hyperplan radical contient tous les points communs aux deux sphères.

En effet, la puissance de tels points par rapport aux deux sphères sont nulles donc égales.
Ainsi par exemple, dans le plan affine Euclidien, l'axe radical de deux cercles sécants en deux points A et B est la droite (AB). Dans l'espace affine Euclidien en dimension 3, le plan radical de deux sphères sécantes en un cercle est le plan contenant ce cercle.

2) La portion de l' hyperplan radical extérieure aux deux sphères est l'ensemble des points d'où l'on peut mener des tangentes égales.

En effet, pour que l'on ait $\|\vec{MT}\| = \|\vec{MT'}\|$, il faut et il suffit que M ait même puissance par rapport aux deux sphères.



2) L'inversion.

E désigne un espace affine euclidien de dimension n ≠ 0 et O un point de E. On appelle inversion de pôle O et de puissance k réel non nul, l'application qui à un point M de E différent de O associe le point M' défini par la relation:

$$\vec{OM'} = \frac{k\,\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$$

On notera $I_{k,O}$ l'inversion de puissance k et de pôle O et on remarquera que les points O, M et M' sont alignés.

Donnons les principales propriétés de l'inversion :

A) $I_{k,O}$ est une application de E\{O}dans E\{O}, elle est involutive et elle n'est pas affine.

Dans la relation de définition, la condition M' = O implique M=O et par conséquent, l'image de $I_{k,O}$ est contenue dans E\{0}.On montre facilement que l'image de M' est M et par conséquent $I_{k,O}$ est involutive. Ainsi $I_{k,O}$ est bijective.

$I_{k,O}$ n'est pas affine puisqu'elle n'est pas définie au point O.

B) Ensemble des points invariants de $I_{k,O}$.

Si M est un point invariant, alors $\vec{OM} = \dfrac{k\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$, relation équivalente à la relation $\|\vec{OM}\|^2 = k$.
Ainsi, si k > 0 , l'ensemble des points invariants est la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{k}$, si k < 0 l'ensemble des points invariants est vide.

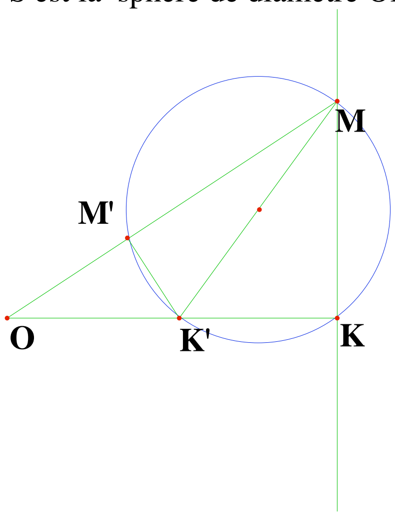
C) Si H est un hyperplan affine ne contenant pas O, $I_{k,O}$ (H) = S\{O} où S est une sphère contenant O.

On note K le projeté orthogonal de O sur l'hyperplan H, K ≠ O puisque O n'est pas dans H.
On note K' l'image de K par $I_{k,O}$ et soit M un point courant de H d'image M'.
Les points O, M, M', K, K' sont dans un même plan (P) et l'on a $(\vec{OM'} / \vec{OM}) = (\vec{OK'} / \vec{OK}) = k$.

Ainsi M, M', K, K' sont sur le cercle de diamètre MK' et les droites (OM) et (M'K') sont orthogonales. Par conséquent, M' est sur le cercle de diamètre OK' et donc sur la sphère de diamètre OK'. Si on note S cette sphère, on a $I_{k,O}$ (H) est contenu dans S\{O}.

Réciproquement, si M' est dans S\{O}, alors la droite (OM') coupe H en un point unique M et d'après ce qui précède, $I_{k,O}$ (M) = M'.

Ainsi $I_{k,O}$ (H) = S\{O}où S est la sphère de diamètre OK'.



D) Réciproquement, si S est une sphère de centre A contenant O, alors son image est un hyperplan orthogonal à la droite (OA) .

Si S est une sphère de centre A contenant O, la droite (OA) coupe la sphère en un point I et soient $I' = I_{k,O}(I)$ et H l'hyperplan affine passant par I' et orthogonal à la droite (OA).
Alors d'après le point C) comme $I_{k,O}$ est involutive, l'image de H est S\{O} et l'image de S\{O}est H.

E) Le produit de deux inversions de même pôle est une homothétie.

Si on considère deux inversions de même pôle, $I_{k,O}$ et $I_{k',O}$ et si M est un point de E différent de O, on pose $M'=I_{k,O}(M)$ et $M''=I_{k',O}(M')$.

Ainsi, $\vec{OM'} = \dfrac{k\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$, $\vec{OM''} = \dfrac{k'\vec{OM'}}{\|\vec{OM'}\|^2}$ et $\vec{OM} = \dfrac{kk'\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2 k^2/\|\vec{OM}\|^2} = \dfrac{k'}{k}\vec{OM}$.

Par conséquent, si M est un point de E différent de O, $I_{k',O} \circ I_{k,O}(M) = H(M)$ où H désigne l'homothétie de centre O et de rapport k'/k.
Noter que l'on a égalité des applications dans E-{O} et non dans E .

F) L'image d'une sphère ne passant pas par le pôle est une sphère homothétique par une homothétie de centre le pôle.
Cette propriété est une conséquence directe du résultat précédent. En effet, si $I_{k,O}$ est une inversion et si S(A, r) est une sphère ne passant pas par le pôle, on note p la puissance du pôle O par rapport à la sphère S. Alors, l'inversion $I_{p,O}$ laisse la sphère S globalement invariante puisque si M est dans S, son image M' est telle que $\vec{OM'} = \dfrac{p\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$ et par conséquent,$(\vec{OM}/\vec{OM'})= p$ et M' est sur la sphère.
Ainsi, si M est sur la sphère, $I_{k,O} \circ I_{p,O}(M') = H_{O,k/p}(M')= I_{k,O}(M)$ et l'image de la sphère S par $I_{k,O}$ est la sphère homothétique de S par l'homothétie de centre O et de rapport k/p.

Remarque : Lorsque n=2, E est donc le plan affine Euclidien, les résultats précédents s'expriment de la façon suivante :

a) L'inverse d'une droite passant par le pôle est globalement invariante, l'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle est un cercle passant par le pôle.

b) L'inverse d'un cercle passant par le pôle est une droite perpendiculaire au diamètre issu de ce pôle, l'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle est un cercle passant pas par le pôle, le pôle est centre d'homothétie des deux cercles.

c) Deux cercles donnés se correspondent dans deux inversions s'ils ne sont pas tangents, dans un seule s'ils sont tangents.

Exercices du chapitre XI

Exercice 1

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté, α un nombre réel. On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec O milieu du segment [AB] et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. On note par 2a la distance de A à B .

1) On se propose de déterminer l'ensemble E des points M(x, y) du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \bmod [\pi]$.

a)Montrer que $M \in E$ si et seulement si $\sin((\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) - \alpha) = 0$.

b) Donner l'expression de $\cos(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ et de $\sin(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c)Démontrer que :

Si $\alpha \neq 0 \bmod[\pi]$ alors M(x, y) appartient à E si et seulement si:

$$x^2 + (y - a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^2 = a^2(\frac{1}{\sin\alpha})^2$$

Si $\alpha = 0 \bmod[\pi]$ alors M(x, y) appartient à E si et seulement si $y = 0$. Conclure.

d) Soit Δ la droite passant par A telle que $\text{mes}(\widehat{\Delta, AB}) = \alpha$.

Montrer que lorsque $\alpha \neq 0 \bmod[\pi]$, E est le cercle passant par A et B , tangent à Δ en A .

e)Construire E pour $\alpha = \pi/6, -\pi/6, 5\pi/6, -5\pi/6$.

2)On se propose de déterminer l'ensemble F des points M(x, y) du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \bmod[2\pi]$.

a)Montrer que F est inclus dans E.

b)Traiter les cas particuliers $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ et $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$

c)On suppose maintenant que $\alpha \neq 0\ [\pi]$.

Montrer que $M \in F$ si et seulement si ($M \in E$ et $y \sin\alpha > 0$) et conclure.

d)Construire F pour $\alpha = \pi/6, -\pi/6, 5\pi/6, -5\pi/6$.

Exercice 2

On se place dans plan affine euclidien orienté et on veut étudier le cercle en coordonnées polaire .

Montrer que le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ a pour équation en coordonnées polaires $\rho^2 = 2\rho(a\cos\tau + b\sin\tau) - c$.

Donner l'équation dans le cas où l'origine O est le centre du cercle et le cas où l'origine est sur le cercle. ($\rho = \pm R$ et $\rho = 2R\cos(\tau - \Phi)$).

Exercice 3

On suppose que E est un espaces affine euclidien de dimension n, muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n)$.

On considère une famille de n+2 points A_1, A_2, ..., A_{n+2} et on pose pour $1\leq i \leq n+2$ $\overrightarrow{OA_i} = \sum_{j=1}^{n} x_i^j e_j$ et $d_i = \|\overrightarrow{OA_i}\|^2$.

On pose aussi $D = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & x_1^1 & .. & x_1^n \\ . & 1 & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ d_{n+2} & 1 & x_{n+2}^1 & .. & x_{n+2}^n \end{vmatrix}$, déterminant d'une matrice d'ordre n+2.

a) Montrer que D = 0 si et seulement si il existe deux réels a et b et un vecteur $\vec{u}$ tels que pour $1\leq i \leq n+2$ les points A_i vérifient la relation $a\|\overrightarrow{OA_i}\|^2+b+2(\vec{u} / \overrightarrow{OA_i}) = 0$.
b)Montrer que D = 0 si et seulement si les points A_i sont sur une même sphère ou dans un même hyperplan.
c) Soient quatre nombre complexes , notés sous forme analytique $z_j = x_j+iy_j$ pour $1\leq j \leq 4$. On considère quatre points du plan complexe notés A_j et d'affixe respectivement zj, pour $1\leq j \leq 4$. Montrer que les quatre points sont cocycliques si et seulement si $\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2\bar{z}_2 & 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3\bar{z}_3 & 1 & z_3 & \bar{z}_3 \\ z_4\bar{z}_4 & 1 & z_4 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} = 0$ et le rang de $\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \\ 1 & z_4 & \bar{z}_4 \end{bmatrix}$ est égal à 3.
En déduire l'équation du cercle passant par trois points non alignés dont les affixes sont z_1, z_2, z_3.

Exercice 4

On considère un triangle ABC. On note C(O, R) le cercle circonscrit au triangle, C(I, r) le cercle inscrit et C(J, r') le cercle exinscrit dans l'angle A.
a) Montrer que les points B, I, C, J sont sur un cercle (Γ) dont le centre est le milieu de IJ.
b) En considérant l'axe radical des cercles (Γ) et C(O, R), montrer les relations d'Euler:

$$\|\overrightarrow{OI}\|^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OJ}\|^2 = R^2 + 2Rr'$$

Exercice 5

E désigne un espace affine Euclidien de dimension 3.

a) Montrer que l'ensemble des points ayant même puissance par rapport a trois sphères est une droite lorsque les trois centres ne sont pas alignés.

b) Montrer que l'ensemble des points ayant même puissance par rapport a quatre sphères est réduit à un point lorsque les quatre centres ne sont pas dans un même plan.

Exercice 6

On considère quatre points distincts du plan affine euclidien, non alignés A, B, C et D et l'inversion de pôle D (par exemple) et de puissance positive k qui transforme A en A', B en B' et C en C' .

Montrer que A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si A', B' et C' sont alignés.

Montrer qu'alors on a la relation $\|\overrightarrow{A'C'}\| = \dfrac{k\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{DA}\|\|\overrightarrow{DC}\|}$ et des relations du même type pour $\|\overrightarrow{A'B'}\|$ et $\|\overrightarrow{B'C'}\|$.

En déduire le théorème de Ptolémée :
« Un quadrilatère convexe ABCD est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés »

Exercice 7

Construire un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à un cercle donné ne passant pas par les points.
On considérera l'inversion de centre A qui laisse le cercle globalement invariant, on construira l'inverse B' du point B par cette inversion et on tracera une tangente au cercle passant par B'.

Exercice 8

Le corps des complexes ç , est un espace affine euclidien de dimension 2 et R = (0, 1, i) est un repère cartésien orthonormé direct (dit repère canonique de ç). Ainsi la représentation d'un complexe dans ce repère est la partie réelle et la partie imaginaire, son module étant la norme de la structure euclidienne.
Soit k un réel non nul. Montrer que l'inversion de pôle 0 et de puissance k est la transformation notée I_k qui à un complexe z associe le complexe $I_k(z) = \dfrac{k}{\bar{z}}$.
Exprimer de façon analogue l'inversion de pôle m.

a) Montrer qu' une inversion n'est pas affine mais est involutive. (elle est égale à sa bijection réciproque)
b) Quels sont les points fixes d'une inversion ?
c) Montrer que l'image par I_k d'un cercle de centre 0 et de rayon r est aussi un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
d) Soit maintenant un cercle C de centre $z_0 \neq 0$ et de rayon r . Quelle est l'image de ce cercle par I_k ? On envisagera deux cas suivant que le cercle C passe ou ne passe pas par 0.
e) On considère l'application J qui à un point z associe le point J(z) = (z-i) / (z+i) .
1) J est elle affine ? est ce une inversion ?
2) Montrer qu'elle établit une bijection du demi plan y>0 sur une partie du plan à préciser.
f) On considère l'application M qui à un point z ≠0 associe le point M(z) = (1/2)(z + 1/z).

1) M est elle surjective ? Est-elle injective ?
2) Déterminer les points fixes de M.
g)On considère deux points z_A et z_B et tels que $|z_A - z_B| = 1$. On note I_A l'inversion de pôle z_A et de puissance 1 et I_B l'inversion de pôle B et de puissance 1.

1) Quel est le domaine de définition de $f = I_A \circ I_B \circ I_A$?

2)Montrer que f est la symétrie orthogonale autour de la médiatrice Δ de z_A et z_B Vérifier que 0 et le cercle de diamètre z_A z_B sont globalement invariants par f.(on pourra supposer que $z_A = 1/2$ et $z_B = -1/2$).

Solutions des exercices du chapitre XI

Exercice 1

1) a) Dans le repère, les coordonnées de A sont (-a, 0) et de B sont (a,0).Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) , M é E si et seulement si mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ = α mod [π] et par conséquent si et seulement si $\sin((\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) - \alpha) = 0$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de coordonnées respectivement, (-a-x, -y) et (a-x, -y) et par conséquent :

$$\cos(\widehat{AMB}) = \frac{(\overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB})}{\|\overrightarrow{MA}\|\|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{-a^2 + x^2 + y^2}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} ,$$

$$\sin(\widehat{AMB}) = \frac{\mathrm{Det}_{\vec{i},\vec{j}}(\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB})}{\|\overrightarrow{MA}\|\|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{2ay}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} .$$

c) * Si $\alpha \neq 0$ mod[π] alors $\sin \alpha \neq 0$ et par conséquent, $\sin(\widehat{AMB} - \alpha) = 0$ si et seulement si $2ay\cos\alpha - (x^2+y^2-a^2)\sin\alpha = 0$.

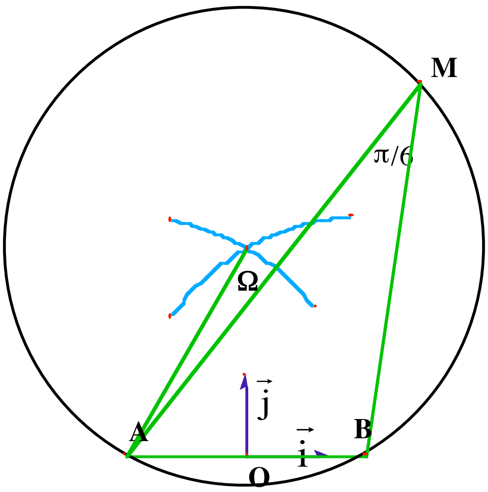
La relation devient $x^2 + (y - a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}$, équation d'un cercle de centre Ω de coordonnées $(0, a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$ et de rayon r avec $r^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}$.

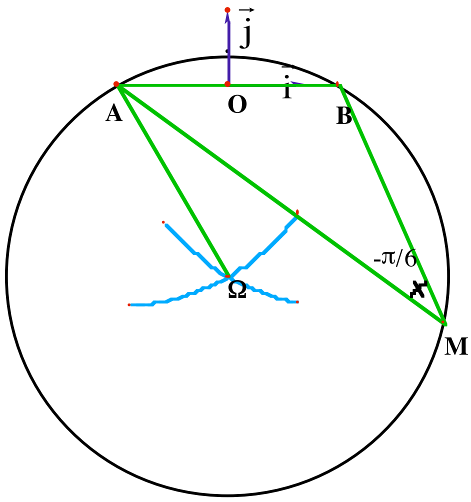
Noter que si M=A (ou B) alors $\widehat{AMB}$ n'est pas défini.

* Si $\alpha = 0$ mod[π] alors $\sin(\widehat{AMB}) = 0$ si et seulement si y = 0, équation d'une droite.

Ainsi si $\alpha \neq 0$ mod[π] , E est un cercle passant par les points A et B et privé de ces points, si $\alpha = 0$ mod[π] est la droite (AB) privée es points A et B.

d) Lorsque $\alpha \neq 0$ mod[π] , E est le cercle de centre Ω et de rayon r. La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées ($\cos\alpha$, $-\sin\alpha$) et le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ a pour coordonnées $(-a, -a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$. Ainsi, $(\vec{u} \,/\, \overrightarrow{\Omega A}) = 0$ et la droite Δ est tangente en A au cercle





e) Si $\alpha=\pi/6$, Ω est de coordonnées $(0, a\sqrt{3})$ et le triangle ΩAB est équilatéral. Ω est à l'intersection des cercles de centre A passant par B et de centre B passant par A. Si $\alpha=- \pi/6$, Ω est de coordonnées $(0, a\sqrt{3})$ et le triangle ΩAB est équilatéral. Ω est à l'intersection des cercles de centre A passant par B et de centre B passant par A.
Si $\alpha = 5\pi/6 = \pi - \pi/6$, on est dans le cas précédent, ainsi que $\alpha = - 5\pi/6 = -\pi+ \pi/6$.

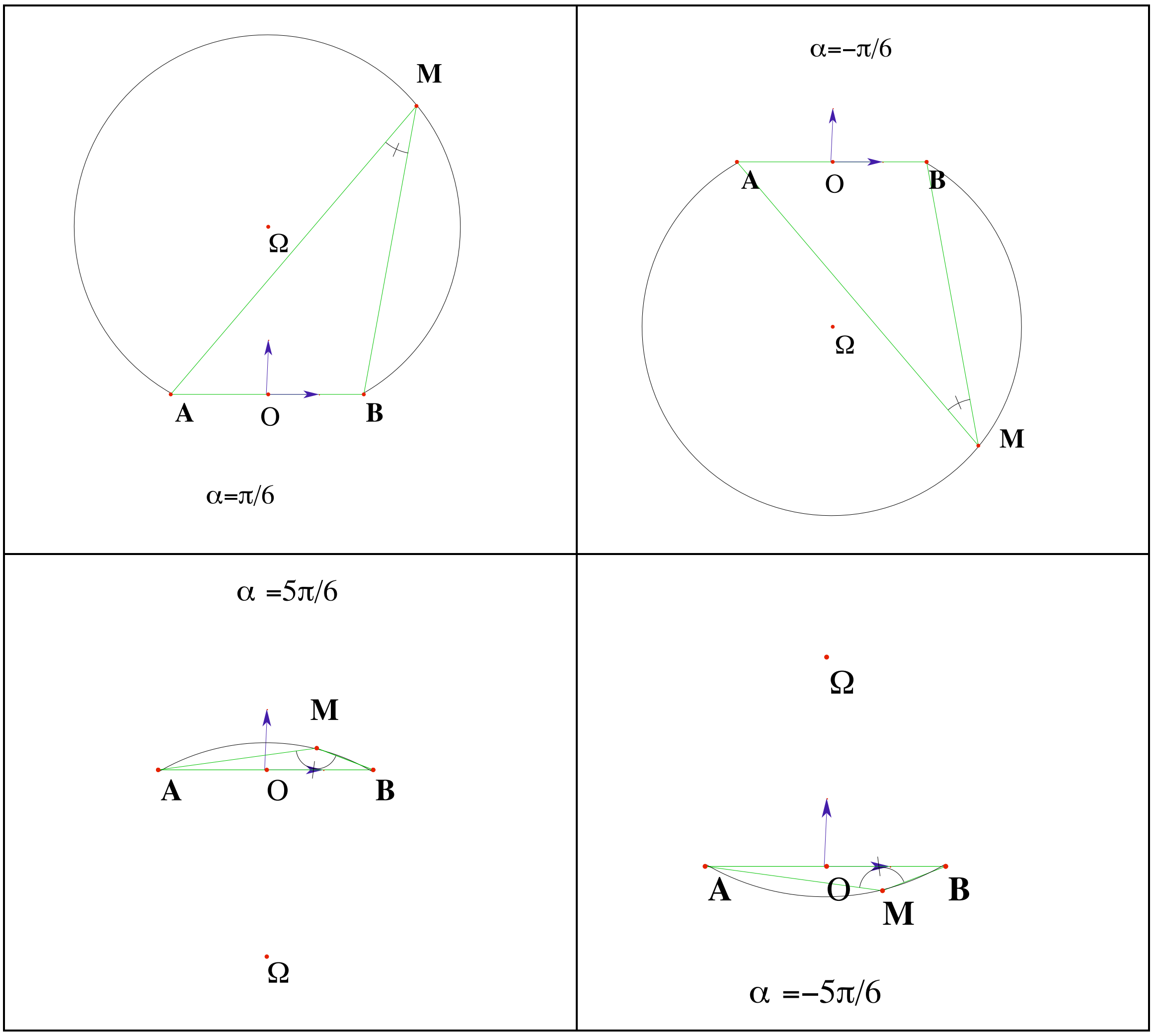
2) a) Si $A\hat{M}B = \alpha \bmod[2\pi]$ alors $A\hat{M}B = \alpha \bmod[\pi]$ et par conséquent, F est contenu dans E.

b) Si $A\hat{M}B = 0 \bmod[2\pi]$, les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont colinéaires et de même sens. F est la droite (AB) privée du segment [AB] (analytiquement on a $x^2+y^2-a^2 > 0$ et $y = 0$).

Si $A\hat{M}B = \pi \bmod[2\pi]$, les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont colinéaires et de sens contraire. F est le segment]AB[(analytiquement on a $x^2 -a^2 < 0$ et $y = 0$).

c) Si $\alpha \neq 0 \bmod[\pi]$, M est dans F si et seulement si $\sin(A\hat{M}B)=\sin\alpha$ et $\cos(A\hat{M}B)= \cos\alpha$, relation équivalente à M est dan E et $\sin\alpha \sin(A\hat{M}B) > 0$.
Ainsi, M est dans F si et seulement si M est dans E et $y\sin\alpha >0$.

En conclusion, si $\sin\alpha > 0$ F est l'intersection entre E et le demi-plan correspondant à $y >0$, si $\sin\alpha < 0$ F est l'intersection entre E et le demi-plan correspondant à $y <0$.



Exercice 2

Dans le plan affine euclidien, on considère un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j}\,)$ et on note I le point défini par $\vec{OI} = \vec{i}$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y), si on pose $|\rho| = \|\vec{OM}\|$ et $\tau = \widehat{IOM}$ mod $[2\pi]$, alors $x=\rho\cos\tau$ et $y = \rho \sin\tau$.
L'équation cartésienne du cercle est $x^2 + y^2 - 2ax -2by + c = 0$ devient $\rho^2 = 2\rho\,(a\cos\tau + b\sin\tau) - c$ (à condition que $a^2+b^2-c > 0$).
Dans le cas où l'origine O est le centre du cercle et R le rayon, l'équation cartésienne est $x^2 + y^2 = R^2$ et par conséquent $a = b = 0$ et $c=-R^2$. Ainsi l'équation est. $\rho = \pm R$.
Dans le cas où l'origine est sur le cercle de rayon R, les coordonnées du centre du cercle sont $(R\cos\Phi, R\sin\Phi)$, et l'équation cartésienne devient $(x-R\cos\Phi)^2+(y-R\sin\Phi)^2 = R^2$.
On obtient alors $\rho^2-2R\rho(\cos\tau\cos\Phi+\sin\tau\sin\Phi) = 0$ et ainsi $\rho = 2R\cos(\tau - \Phi)$.

Exercice 3

a) D=0 si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice sont liés. Si on note C_1, C_2 , ..., C_{n+2} les vecteurs colonnes matrice, la condition devient $D = 0$ si et seulement si il existe deux réels a et b et une famille de réels $c_1, c_2,...c_n$ tels que $aC_1+bC_2+\sum_{k=1}^{n} c_k C_{k+2} =0$.

Si on note $2\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $c_1, c_2,...c_n$ la relation devient il existe deux réels a et b et un vecteur $\vec{u}$ tels que pour $1\leq i \leq n+2$ les points A_i vérifient la relation $a\|\overrightarrow{OA_i}\|^2+b+2(\vec{u}/\overrightarrow{OA_i}) = 0$.

b)Si D=0 les points A_i vérifient la relation et on a l'alternative :

* Si a = 0 les points sont sur l' hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = -b/2$.

* Si a ≠ 0 les points sont sur la sphère d'équation $a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b = 0$ (On rappelle que dans ce cas n+1 des points définissent une unique sphère, la sphère circonscrite).

La réciproque est immédiate puisque si les points sont dans un hyperplan ou dans une sphère, les vecteurs colonnes de la matrice sont liés.

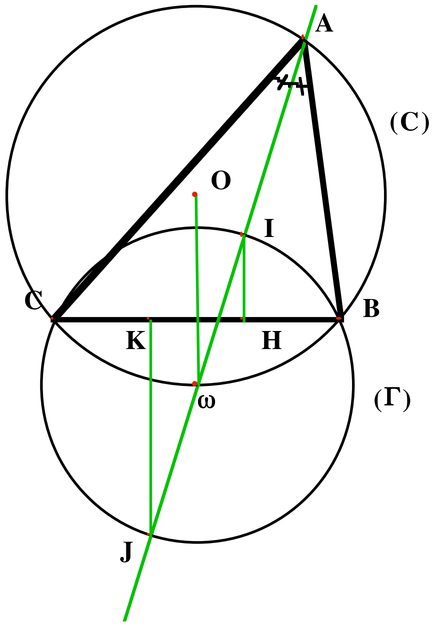
c) Une opération élémentaire sur les deux dernières colonnes donne la relation $\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2\bar{z}_2 & 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3\bar{z}_3 & 1 & z_3 & \bar{z}_3 \\ z_4\bar{z}_4 & 1 & z_4 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} = -2i \begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ z_2\bar{z}_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ z_3\bar{z}_3 & 1 & x_3 & y_3 \\ z_4\bar{z}_4 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$ et par conséquent on est ramené au cas précédent. De la même façon, le rang de $\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \\ 1 & z_4 & \bar{z}_4 \end{bmatrix}$ est égal au rang de $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}$ et par conséquent la relation correspond au fait que trois des quatre points sont non alignés.

L'équation du cercle passant par trois points non alignés dont les affixes sont z_1, z_2, z_3 est $\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2\bar{z}_2 & 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3\bar{z}_3 & 1 & z_3 & \bar{z}_3 \\ z\bar{z} & 1 & z & \bar{z} \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 4

Dans le triangle ABC, le centre du cercle circonscrit O est l'intersection des médiatrices. Le centre du cercle inscrit I est l'intersection des bissectrices intérieures. Le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, J est l'intersection des bissectrices extérieures et B et C et de la bissectrice intérieure en A.

a) On sait que les bissectrices intérieures et extérieures sont orthogonales, les droites (BI) et (BJ) sont orthogonales en B et par conséquent le point B est sur le cercle de diamètre IJ.



De même les droites (CI) et (CJ) sont orthogonales en C et par conséquent le point C est sur le cercle de diamètre IJ.
Ainsi les points B, I, C, J sont sur un cercle (Γ) dont le centre ω est le milieu de IJ et par conséquent il appartient à la médiatrice de BC.
D'autre part, ω est sur la bissectrice intérieure en A et par conséquent est sur le milieu de l'arc BC intérieur à l'angle $B\hat{A}C$.
b) L'axe radical des cercles (Γ) et C(O, R) est la droite (AB). Si on note H la projection du point I, sur la droite (AB), alors $r = \|\vec{HI}\|$. On note $P_C(I)$ (resp. $P_\Gamma(I)$) la puissance du point I par rapport au cercle C (resp.Γ).

Ainsi, puisque I est sur (Γ) on a $P_C(I) = P_C(I) - P_\Gamma(I) = (\|\vec{IO}\|^2 - R^2) - (\|\vec{I\omega}\|^2 - R'^2)$, avec R' rayon du cercle (Γ).
H étant sur l'axe radical, on a $(\|\vec{HO}\|^2 - R^2) - (\|\vec{H\omega}\|^2 - R'^2) = 0$ et la relation précédente devient $P_C(I) = \|\vec{IO}\|^2 - \|\vec{HO}\|^2 + \|\vec{H\omega}\|^2 - \|\vec{I\omega}\|^2$. La formule de la médiane appliquée deux fois donne $P_C(I) = 2(\vec{HI}/\vec{O\omega})$.
Ainsi, $P_C(I) = \|\vec{IO}\|^2 - R^2 = -2Rr$ et on obtient la relation $\|\vec{OI}\|^2 = R^2 - 2Rr$.
Si on note K la projection du point J, sur la droite (AB), alors $r' = \|\vec{HJ}\|$.
En considérant $P_C(J)$ (resp. $P_\Gamma(J)$) la puissance du point J par rapport au cercle C (resp.Γ) et en faisant une démonstration analogue au cas précédent, on obtient la relation $\|\vec{OJ}\|^2 = R^2 + 2Rr'$.

Exercice 5

a) On sait que le plan radical de deux sphères est un plan orthogonal à la droite des centres des deux sphères. L'ensemble des points ayant même puissance par rapport au trois sphères est l'intersection des trois plan radicaux. Compte tenu de la définition, c'est aussi l'intersection de deux des trois plan radicaux.
Dans l'espace, l'intersection de deux plans est soit vide, soit une droite, soit un plan.
Lorsque les trois centres ne sont pas alignés les plans radicaux ne sont pas parallèles et par conséquent se coupent suivant une droite.
Si les centres sont alignés les plans radicaux sont parallèles et l'intersection et soit vide soit un plan.
b) L'ensemble des points ayant même puissance par rapport au quatre sphères est l'intersection des quatre plan radicaux. Compte tenu de la définition, c'est aussi l'intersection de trois des quatre plan radicaux.

Dans l'espace, l'intersection de trois plans est soit vide, soit un point, soit une droite, soit un plan. Lorsque les quatre centres ne sont pas dans un même plan, les trois sont non parallèles et par conséquent se coupent en un point.

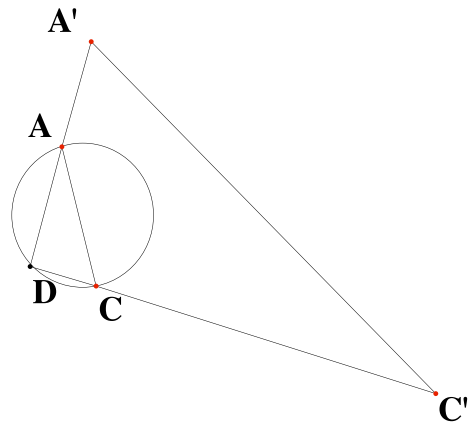
Exercice 6

Si A, B, C, D sont sur un même cercle, l'inversion de pôle D transforme celui-ci en une droite et par conséquent A', B' et C' sont alignés.
Réciproquement, si A', B' et C' sont alignés sur une droite Δ on a l'alternative :

* D est sur Δ et A, B, C, D sont alignés ce qui est impossible.
* D n'est pas sur Δ et l'image de Δ est un cercle passant par D et par conséquent A, B, C, D sont sur un même cercle.

La définition de l'inversion permet d'écrire $\vec{DA'} = \dfrac{k\,\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|^2}$ et $\|\vec{DA'}\| = k\dfrac{\|\vec{DA}\|}{\|\vec{DA}\|^2}$. On obtient $\|\vec{DA}\|\|\vec{DA'}\| = k$ et de même $\|\vec{DC}\|\|\vec{DC'}\| = k$.

Ainsi, $\dfrac{\|\vec{DA}\|}{\|\vec{DC}\|} = \dfrac{\|\vec{DC'}\|}{\|\vec{DA'}\|}$ et les triangles DAC et DC'A' ayant un angle égal et les deux côtés opposés proportionnels sont semblables(3° cas).



On obtient $\dfrac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{C'A'}\|} = \dfrac{\|\vec{DA}\|}{\|\vec{DC'}\|} = \dfrac{\|\vec{DA}\|\,\|\vec{DC}\|}{\|\vec{DC'}\|\,\|\vec{DC}\|}$ et la relation $\|\vec{A'C'}\| = \dfrac{k\|\vec{AC}\|}{\|\vec{DA}\|\|\vec{DC}\|}$ et des relations du même type pour $\|\vec{A'B'}\|$ et $\|\vec{B'C'}\|$.

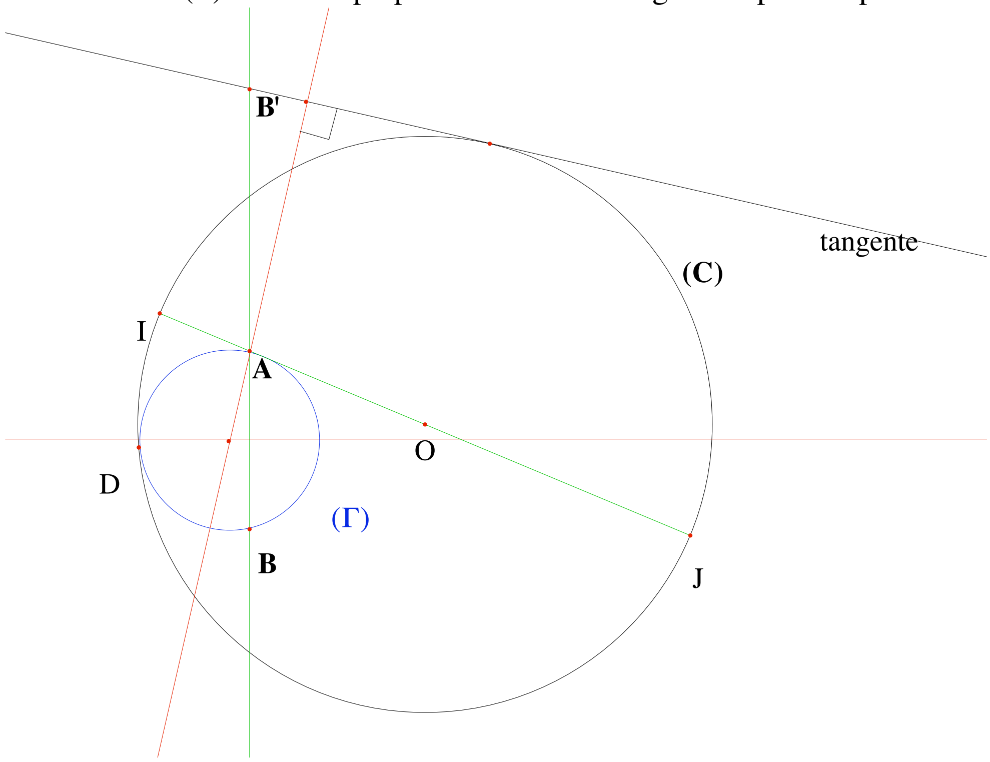
Théorème de Ptolémée :

Soit ABCD un quadrilatère convexe, alors d'après les résultats précédents, le quadrilatère est inscriptible si et seulement si les points A', B', C' sont alignés. B' étant sur le segment]A' C'[la relation est équivalente à $\|A'C'\| = \|A'B'\| + \|B'C'\|$.
En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$\dfrac{k\|\vec{AC}\|}{\|\vec{DA}\|\|\vec{DC}\|} = \dfrac{k\|\vec{AB}\|}{\|\vec{DA}\|\|\vec{DB}\|} + \dfrac{k\|\vec{BC}\|}{\|\vec{DB}\|\|\vec{DC}\|}$ et après simplification le relation de Ptolémée $\|\vec{AC}\|\|\vec{DB}\| = \|\vec{AB}\|\|\vec{DC}\| + \|\vec{BC}\|\|\vec{DA}\|$.

Exercice 7

Analyse :
On note (C) le cercle donné de centre O et (Γ) le cercle passant par A et B et tangent à (C) en D.
L'inversion $I_{k,A}$ de pôle A et de rapport k égal à la puissance de A à (C) laisse le cercle globalement invariant et on note B'= $I_{k,A}$ (B)
Le cercle (Γ) passe par le pôle et l'inverse de (Γ) est une droite Δ passant par B' et tangente au cercle (C).
Le centre du cercle (Γ) est sur la perpendiculaire a la tangente Δ passant par A.



Construction :

* Construction de B'. La droite passant par A et le centre du cercle coupe le cercle en deux points I et J. Le cercle passant par BIJ coupe la droite (AB) en B'.
Si la droite (AB) passe par O, la rotation de centre O d'un quart de tour transforme I en I' , J en J' et A en A'. Le cercle passant par BI'J' coupe la droite (AB) en B'.
* Construction de la tangente en B' au cercle (si B' est intérieur au cercle il n'y a pas de solution, si B' est sur le cercle il y a une solution sinon il y a deux solutions).
* On construit la perpendiculaire à la tangente passant par A.
* le centre du cercle (Γ) est à l'intersection de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire à la tangente passant par A.

Discussion :

* La construction ne peut se faire que si A et B ne sont pas sur le cercle.
* Lorsque un des points est intérieur au cercle et l'autre extérieur il n'y a pas de solution.

Exercice 8

Dans ce texte, la difficulté réside dans le fait que suivant les cas un complexe est un point ou un vecteur. Ainsi, si z et z' sont des points le vecteur $\overrightarrow{zz'}$ = z'-z et $\overrightarrow{0z}$=z.

La relation qui définit l'inversion devient $I_k(z) = z' = \dfrac{kz}{z\overline{z}} = \dfrac{k}{\overline{z}}$.

Si m est le pôle, la relation devient $z'-m = \dfrac{k(z-m)}{(z-m)(\overline{z}-\overline{m})} = \dfrac{k}{\overline{z}-\overline{m}}$ et $z' = \dfrac{k}{\overline{z}-\overline{m}}+m$.

a) Une inversion n'est pas affine puisque elle n'est pas définie en un point. Elle est involutive puisque $I_k(I_k(z)) = I_k(\dfrac{k}{\overline{z}}) = \dfrac{k}{\overline{k/\overline{z}}} = z$.

b) z est un point fixe de l' inversion I_k si et seulement si $z\overline{z}=k$. Ainsi, si k<0 il n'y a pas de point fixe, si k>0 l'ensemble des points fixes est le cercle de centre le pôle et de rayon $\sqrt{k}$.

c) L'équation du cercle de centre 0 et de rayon r est $z\overline{z} = r^2$ si $z' = I_k(z)$, on obtient $z'\overline{z}' = \dfrac{k^2}{r^2}$ équation d' un cercle de centre 0 et de rayon $|k|$ /r .

d) L'équation du cercle est $(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0) = r^2$ et si $z' = I_k(z)$ on obtient $r^2 = \dfrac{1}{|z'|^2}(k-\overline{z}_0z')(k-z_0\overline{z}')$ et $|z'|^2(r^2-z_0\overline{z}_0)+k(z'\overline{z}_0+z_0\overline{z}')-k^2=0$, équation d'un cercle ou d'une droite.

* Si $z_0\overline{z}_0 = r^2$, le pôle 0 est sur le cercle et l'image du cercle est une droite d'équation $z\overline{z}_0 + z_0\overline{z} = k$.

* Si $z_0\overline{z}_0 \neq r^2$, le pôle 0 n'est pas sur le cercle et l'image du cercle est un cercle d'équation $(z+\dfrac{k}{\alpha}z_0)(\overline{z}+\dfrac{k}{\alpha}\overline{z}_0) = \dfrac{k^2r^2}{\alpha^2}$ avec $\alpha = r^2 - z_0\overline{z}_0$, équation d'un cercle homothétique du premier dans une homothétie de centre 0 et de rapport k/α .

e) 1)J n'est pas définie en -i, elle n'est pas affine.
L' image de i, J(i) = 0 et J(0) = -1, J n'est pas involutive et par conséquent n'est pas une inversion.

2) Si l'on pose Z = (z-i) / (z+i) alors la relation est équivalente à z = i(Z+1)/(Z-1). Ainsi J est une bijection de ç \{-i} sur ç \{1}.
On pose naturellement z=x+iy et ainsi y est la partie imaginaire de i(Z+1)/(Z-1). La condition y > 0 est équivalente à $\dfrac{1}{2i}(i\dfrac{1+\overline{Z}}{1-Z}+i\dfrac{1+Z}{1-\overline{Z}})>0$.

Après simplification on obtient $\dfrac{1-Z\overline{Z}}{(1-Z)(1-\overline{Z})}>0$ et Z est à l'intérieur du cercle unité.

f) M n'est pas définie en 0. On pose Z = (1/2)(z + 1/z), la relation est équivalente à z^2-2Zz+1 = 0

1) M est surjective puisque l'équation du second degré en z a toujours au moins une solution.
M n'est pas injective puisque par exemple si Z = 0 on obtient deux solutions.
injective ?

2) Les points fixes de M vérifient $z^2=1$ soit $z=\pm 1$.

g)

1) Le point z_B est sur le cercle de centre z_A et de rayon 1 et par conséquent est invariant pour I_A .De la même façon le point z_A est invariant pour I_B. Le domaine de définition de f est donc ç $\setminus\{z_A, z_B\}$.

2) Quitte à faire une isométrie, on peut supposer que $z_A= 1/2$ et $z_B = -1/2$. Si z est un point du domaine de définition de f alors :
On pose $z_1 =I_A(z)$, $z_2 = I_B(z_1)$ et $z_3= I_A(z_2)$ et on a $(z_1-1/2)(\bar{z}-1/2)=1$, $(z_2+1/2)(\bar{z}_1+1/2) = 1$, $(z_3-1/2)(\bar{z}_2-1/2)=1$.
De $(z_2+1/2)(\bar{z}_1+1/2) = 1$ on déduit $(\bar{z}_2+1/2)(z_1+1/2)=1$ et $\bar{z}_2=-1/2+1/(z_1+1/2)$ et ainsi de suite.
On aboutit à la relation $z_3=-\bar{z}$ et par conséquent $f(z)=-\bar{z}$.
f est la symétrie orthogonale autour de la médiatrice Δ de z_A et z_B , $f(0)=0$ et le cercle de diamètre z_A z_B est d'équation $z\bar{z}=1/4$ et est globalement invariant par f.
