Chapitre XII - LA CONVEXITE

La notion de convexité est une notion affine. et aurait sa place dans la première partie de l'ouvrage. Toutefois, les propriétés intéressantes sont celles qui font intervenir la structure euclidienne ; projection , distance, séparation.
Il faut d'ailleurs souligner que ces notions sont en général indépendantes de la structure euclidienne.

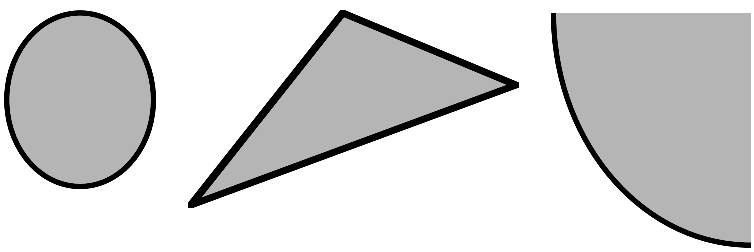
1) Généralités.

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine , $\vec{E}$ étant un espace vectoriel sur le corps des réels . Si a, b sont deux points de E, on appelle segment d'extrémité a et b et on note [a b] l'ensemble des barycentres du système { (a, 1-t), (b, t) } lorsque t décrit l'intervalle [0, 1].
Ainsi, m est dans le segment [a b] si et seulement si il existe un réel t dans l'intervalle [0, 1] tel que $\vec{am} = t\,\vec{ab}$.

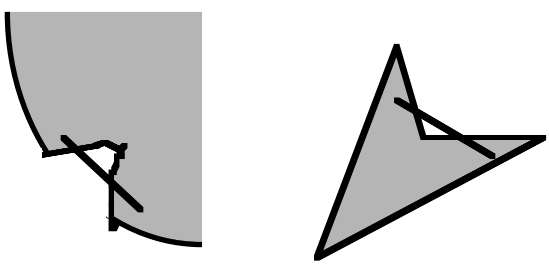
Définition : Une partie Γ non vide de E est dite convexe si et seulement si pour tous points a, b de Γ , le segment [a b] est contenu dans Γ.

Ainsi la partie non vide Γ est convexe si et seulement si la relation suivante est vérifiée:
Si a, b sont des points de Γ alors pour tous t dans l'intervalle [0, 1] Bary{(a, t) , (b, 1-t) } est dans Γ .

Ensembles convexes



Ensembles non convexes



Théorème : Soit Γ une partie non vide de E, Γ est convexe si et seulement si tout barycentre de points de Γ affectés de coefficients positifs ou nuls est dans Γ.

En effet, le deuxième point est un cas particulier du premier.
Réciproquement, si a, b sont dans Γ et si α et β sont positifs ou nuls avec $\alpha+\beta \neq 0$, alors si on pose $t = \alpha/(\alpha+\beta)$ alors, $t \in [\, 0, 1\,]$ et bary$\{(a, \alpha) , (b, \beta) \}$= bary$\{(a, t) , (b, 1\text{-}t) \}$

A) Enveloppe convexe

Proposition: Une intersection de parties convexes est soit vide soit un convexe.

Soit $\{C_i \ / \ i \in I \}$ une famille de convexes indexée par l'ensemble I. Si l'intersection $\bigcap\limits_{i\in I} C_i$ est non vide, alors si a et b sont deux éléments de l'intersection , ils appartiennent à tous les C_i et les barycentres de a et b à coefficients positifs aussi donc $\bigcap\limits_{i\in I} C_i$ est soit vide soit un convexe.

Définition :Soit S une partie non vide de E, on appelle enveloppe convexe de S et l'on note conv(S) l'intersection de toutes les parties convexes contenant S. C'est pour l'inclusion le plus petit ensemble convexe contenant S.

Si S est une partie non vide, on considère l'ensemble des convexes contenant S , soit $\{C_i \ / \ i \in I \}$. (c' est un ensemble non vide puisqu'il contient S)
$\bigcap\limits_{i\in I} C_i$ est par conséquent un convexe non vide contenant S, c'est pour l'inclusion le plus petit ensemble convexe contenant S.

Proposition : L'enveloppe convexe, Conv(S) est l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de S affectés de coefficients positifs ou nuls.

Soit S un ensemble non vide, et soit B l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de S affectés de coefficients positifs ou nuls.
* Conv(S) est convexe et contient S donc Conv(S) contient B
* Réciproquement,. B contient S et B est un convexe d'après la propriété d'associativité des barycentres. et par conséquent B contient Conv(S).

Exemples:

- Si a et b sont deux points distincts, Conv(a, b) est le segment [a b].

- Si E est de dimension supérieure à 2 et si a, b , c sont trois points non alignés, Conv({a, b, c}) est l'intérieur du triangle abc.

- Une VLA est convexe.

B)Ensembles convexes et applications affines.

Les ensembles convexes ont des propriétés similaires au VLA par rapport aux applications affines.

Théorème: Soient X et Y deux espaces affines et f une application affine de X dans Y alors si C est une partie convexe de X, f(C) est une partie convexe de Y.
D'autre part, si C' est une partie convexe de Y, f^{-1}(C') est soit vide, soit une partie convexe de X.

C'est une application directe de la propriété caractéristique des applications affines : l'image d'un barycentre est le barycentre des images.

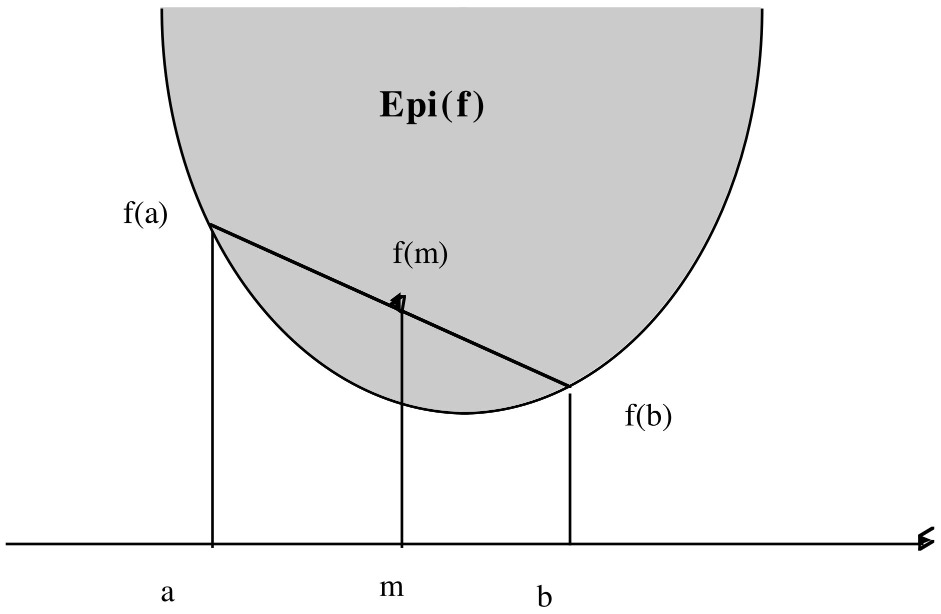
C) Fonctions convexes.

Soit (E, $\vec{E}$) un espace affine $\vec{E}$ étant un espace vectoriel sur le corps € .Une fonction f de E dans € est dite convexe si son domaine de définition Γ est convexe et si chaque fois que l'on choisit deux points a, b de Γ, et t dans l'intervalle [0 1]. on a :

$$f(\text{bary}\{ (a, 1-t), (b, t) \} \leq \text{bary}\{ (f(a),1-t), (f(b),t) \}$$

(le segment d'extrémité f(a) et f(b) est au dessus de la courbe)
Si f est une fonction f de E dans € , on appelle épigraphe de f l'ensemble noté épi(f) = { (a, t)∈ Γ × € / t ≤ f(a) }. On montre la relation ci-dessous qui lie les deux notions :

Théorème : Si f est une fonction f de E dans €, alors f est une fonction convexe si et seulement si épi(f) est une partie convexe de Γ × € .



Remarque:
On rappelle le résultat suivant qui se révèle bien utile en pratique :
Si I est un intervalle de € et f une fonction réelle dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.
En particulier, si f est deux fois dérivable, f est convexe si et seulement si f" est positive sur I.

2) Projection sur un convexe fermé.

Dans cette partie et la suivante, E est un espace affine euclidien de dimension n et par conséquent un espace métrique homéomorphe à un hyperplan affine de $€^{n+1}$. Ainsi, en particulier, les compacts de E sont les fermés bornés et les VLA sont des fermés (une VLA de $€^{n+1}$ est la translatée d'un sous espace vectoriel).

On a vu que si V est une variété linéaire affine et si x est un point de E, il existe un unique point de E réalisant la distance de x à V, c'est le point projection orthogonale de x sur V.
Que peut-on dire si on remplace la VLA par un convexe ? La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème : Soit E un espace affine euclidien , C un convexe fermé de E et x un point de E, alors il existe un unique point de C tel que la distance de x à C est réalisée au point x_C .Plus précisément, on a :

$$d(x, C) = d(x, x_C) \text{ et } x_C \text{ est appelé la projection de x sur C.}$$

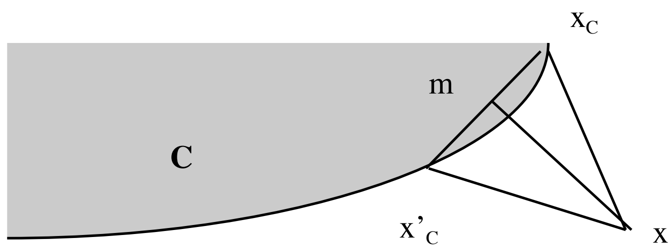
Par définition, $d(x, C) = \text{Inf } \{ \| \overrightarrow{xy} \| \ / \ y \text{ est dans } C\}$, si c_0 est un point fixé de C, on note S la sphère fermée de centre x et de rayon $r = \| \overrightarrow{xc_0} \|$.
Ainsi, il est clair que $S \cap C$ est un fermé borné donc un compact de E et $d(x, C) = \text{Inf}\{ \| \overrightarrow{xy} \| \ / \ y \text{ est dans } S \cap C \}$.

Il existe donc un point x_C de C tel que $d(x, C) = d(x, x_C)$ (On notera que l'existence du point x_C ne fait pas intervenir la convexité).

Unicité : Si x_C et x'_C sont deux points distincts de C tels que :

$$d(x, C) = d(x, x_C) = d(x, x'_C) = \|\overrightarrow{xx_C}\| = \|\overrightarrow{xx'_C}\|$$

Le triangle $x\, x_C\, x_C'$ est donc isocèle et le milieu m de $x_C\, x_C'$ est d'une part dans C puisque C est convexe et d'autre part tel que $\|\overrightarrow{xm}\| \leq \|\overrightarrow{xx'_C}\|$, puisque la droite (xm) est orthogonale à la droite à ($x_C x_C'$) . Ainsi $m = x_C = x_C'$ et l'unicité.



L'application P_C qui à x associe x_c est appelée la projection sur le convexe fermé C, il est clair que la restriction de la projection à C est l'application identique.

Remarques:

1) si V est une VLA de E, V est convexe fermé et par conséquent, dans ce cas, compte tenu de l'unicité la projection sur le convexe V s'identifie à la projection orthogonale sur V.

2) Si y est dans C et tel que, pour tout point c de C, $\|\overrightarrow{xy}\| \leq \|\overrightarrow{xc}\|$ alors y réalise le minimum et y est la projection de x sur C.

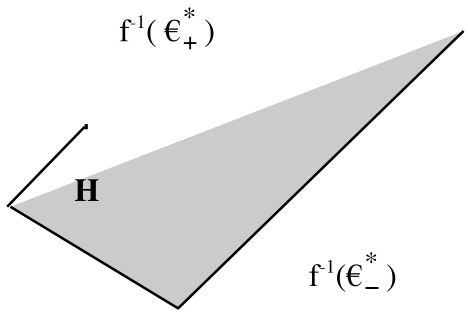
3) Si C est un convexe et si x n'est pas dans C . La distance de x à C est réalisée en un point de la frontière de C.

4) L'application distance à un convexe fermé est lipschitzienne de rapport 1 et par conséquent continue.

3) Séparation.

Si H est un hyperplan affine de E, H est le noyau d'une forme affine f de E. Les sous ensembles $f^{-1}(€^*_+)$, $f^{-1}(€^*_-)$ et $f^{-1}(0)$ =H définissent une partition de E . Cette partition est indépendante de F puisque toutes les formes affines qui définissent H sont colinéaires.

Les ensembles $f^{-1}(\,€_{+}^{*}\,)$, $f^{-1}(€_{-}^{*})$ sont appelés les demi-espaces ouverts de E, de façon analogue , $f^{-1}(€_{+}\,)$, $f^{-1}(€_{-}\,)$ sont appelés les demi-espaces fermés de E (noter que dans ce cas ils ne constituent pas une partition de l'espace).
On montre facilement que les demi-espaces fermés ou ouverts sont des parties convexes (utiliser une forme affine définissant l' hyperplan H).



Définition: Soient A et B deux parties non vides et disjointes de E et H un hyperplan, on dira que :

* H sépare A et B si l'un des demi-espace ouvert contient A et son complémentaire contient B.

* * H sépare strictement A et B si l'un des demi-espace ouvert contient A et l'autre contient B.

Exemples:

1) Une droite dans le plan affine sépare le plan en deux demi-plans
2) Un plan dans l'espace affine sépare l'espace en deux demi-espaces.

Théorème de séparation : Si C est un convexe fermé de E et si x est un point n'appartenant pas à C, alors il existe un hyperplan affine H dont l'un des demi-espaces ouverts contient x et l'autre C. Ainsi H sépare strictement le point x et C.

C'est une application du théorème de projection. Si on considère l'hyperplan H médiateur de x et de $P_C(x)$, alors par définition, H passe par le milieu m de x et de $P_C(x)$, et H est l'ensemble des points y de E tels que le produit scalaire $(\overrightarrow{ym}\,/\,\overrightarrow{xP_C(x)}) = 0$, par conséquent,

* H ne contient pas x

* Montrons que H et C sont disjoints.

Si u est dans C alors pour tout λ dans l'intervalle [0, 1] le point y = bary{(u, λ), ($P_C(x)$, 1-λ))}est dans C et $\|\overrightarrow{xy}\|^2 \geq \|\overrightarrow{xP_C(x)}\|^2$ et $\|\overrightarrow{P_C(x)y}\|^2 + 2(\overrightarrow{xP_C(x)}\,/\,\overrightarrow{P_C(x)y}) \geq 0$.
Ainsi, $\lambda^2 \|\overrightarrow{uP_C(x)}\|^2 + 2\lambda(\overrightarrow{xP_C(x)}/\,\overrightarrow{P_C(x)u}) \geq 0$ et $(\overrightarrow{xP_C(x)}/\,\overrightarrow{P_C(x)u}) \geq 0$.
Puisque m est le milieu de x $P_C(x)$, on obtient :

$(\overrightarrow{xP_C}(x) / \overrightarrow{m}u) \geq (\overrightarrow{xP_C}(x) / \overrightarrow{mP_C}(x)) = 2\|\overrightarrow{mP_C}(x)\|^2 > 0$ ce qui prouve que u n'est pas dans H et par conséquent $H \cap C = \emptyset$.

Remarque : Dans la démonstration précédente , on aurait pu considérer l'hyperplan affine H passant par P_C (x) et orthogonal à la droite (x P_C (x)) **.** P_C(x) est dans l'intersection de H et C et H sépare x et C, H est appelé hyperplan d'appui de C.

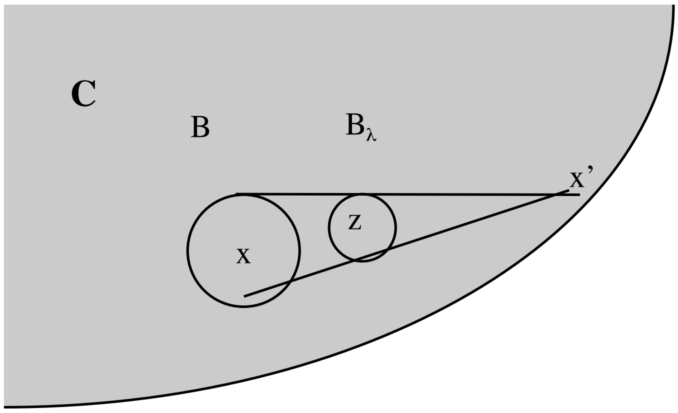
Théorème : Une partie convexe fermée est l'intersection de tous les demi-espaces fermés la contenant.

Si C est une partie convexe fermée et x un point n'appartenant pas à C alors il existe un demi -espace fermé F_x contenant C et ne contenant pas x .
Ainsi, $\bigcap_{x \in E \setminus C} F_x$ contient C et est un convexe fermé. Comme le complémentaire de cet en semble contient E \ C, on peut affirmer que :

$$\bigcap_{x \in E \setminus C} F_x = C$$

Proposition : Si C est un convexe , si x est un élément de l'intérieur de C et x' un élément de C alors, l'intervalle [x x'[est dans l'intérieur de C.

Si x est dans l'intérieur de C, alors il existe une boule B (ouverte) centrée en x et contenue dans l'intérieur de C. Si z est dans le segment] x x'[, il existe λ dans l'intervalle] 0,1[tel que z = bary{(x,λ),(x', 1-λ) }.
Soit B_λ={ bary{(t,λ),(x', 1-λ) / t∈B}alors z est dans B_λ , B_λ est contenu dans C et est ouvert puisque B_λ est homothétique de B dans une homothétie de centre x'.



Théorème de HAHN-BANACH : (*Version géométrique)*

Soit E un espace affine Euclidien , C un convexe ouvert et O un point n'appartenant pas à C. Alors il existe un hyperplan affine contenant O et disjoint de C.

On a l'alternative :

* Si le point O n'est pas sur la frontière de C, la projection de O sur l'adhérence de C, est différente de O. Soit O' cette projection , l'hyperplan passant par O et orthogonal à la droite (OO') répond à la question.

* Si le point O est sur la frontière de C , la démonstration est un peu plus difficile.
Dans un premier temps, on suppose que E est le plan affine . A chaque $\lambda > 0$, on associe le convexe C_λ homothétique de C dans l'homothétie de centre O et de rapport λ et soit $B=\bigcup_{\lambda>0} C_\lambda$.
B est un convexe ouvert et si on choisit un point x de la frontière B* de B différent de O, (il en existe car sinon B*\{O} serait vide et E\{O} ne serait pas connexe) alors x n'est pas dans B puisque B est ouvert.
Si on note x' le symétrique de x par rapport à O, alors x' n'est pas dans B sinon le segment [x' x[serait dans B et O serait dans B.
Ainsi la droite (x' x) ne coupe pas B et par conséquent pas C.

Dans le cas général, on se ramène au plan en faisant un raisonnement par l'absurde. Si tous les hyperplans passant par O, coupent C, alors il existe un plan affine rencontrant C et toutes les droites passant par O de ce plan rencontrent C ce qui est impossible d'après la propriété précédente.
L'hyperplan ainsi construit est un hyperplan d'appui passant par O.

Autre forme du théorème de Hahn-Banach.

On donne une forme équivalente du théorème de Hahn-Banach, forme bien plus utile en pratique et qui parait plus générale.

Théorème de séparation:
Soit E un espace affine Euclidien , C un convexe ouvert et C' un convexe de E . Si C et C' sont disjoints , il existe un hyperplan affine H séparant les deux convexes.
Si C' est ouvert, l'hyperplan sépare strictement las convexes

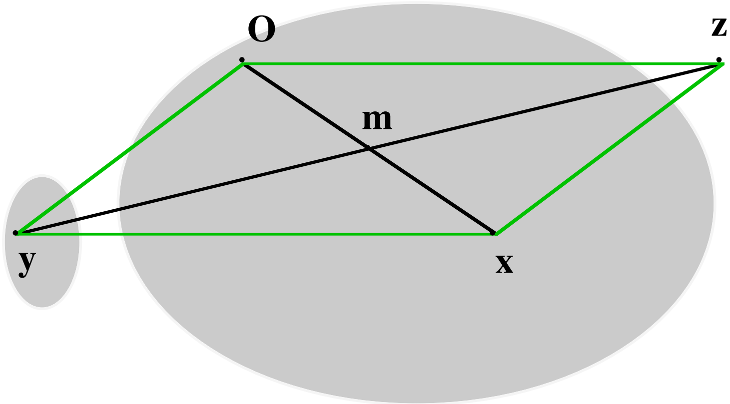
On choisit un point O dans C et on note B={bary((O,1),(x,1),(y,-1)) / $x \in C$ et $y \in C'$} alors:

- <u>B est non vide</u> puisque C et C' sont non vides et ne contient pas O (si O est dans B alors x = y ce qui est impossible).

- <u>B est convexe.</u>
Soient z= bary{ (O,1),(x,1),(y,-1))}et z'= bary{(O,1),(x',1),(y',-1)} et $\lambda \in]0,1[$, alors bary{(z,λ),(z', 1-λ) = bary{ (O,1), bary{ (x,λ),(x', 1-λ), bary{ (y,λ),(y', 1-λ) }

- <u>B est ouvert</u>
On remarque que si z = bary{ (O,1),(x,1),(y,-1))}, alors si m est le milieu de 0x, m est le milieu de zy , $2\vec{mz} = \vec{yz}$. z est l'homothétique de y dans une homothétie de centre m et de rapport -1.

Ainsi, puisque une boule ouverte se transforme en une boule ouverte par une homothétie, B est ouvert.



- <u>Construction de H</u>

Compte tenu des résultats précédents, on applique le théorème de Hahn-Banach au point O et au convexe B et par conséquent Il existe un hyperplan affine G disjoint de B et contenant O.
Il existe donc une forme affine g de noyau G et ainsi g(O) = 0 et pour tout z dans B g(z) > 0 , l'inégalité est stricte puisque B est ouvert.
Par définition de B, si z est dans B, il existe x dans C et y dans C' tels que z = bary{ (O,1),(x,1),(y,-1))} et par conséquent $\vec{Oz} = \vec{yx}$ et g(x) > g(y).
Si on pose α = Inf { g(x) / x est dans C} et h = g-α , on note H le noyau de la forme affine h.
Dans ces conditions on a :

* H et G sont deux hyperplans parallèles.
* Pour tout x dans C, h(x) > 0 , l'inégalité est stricte puisque C est ouvert.
* Pour tout y dans C', $\alpha \geq g(y)$ et $h(y) \leq 0$.

Ce qui montre que H sépare C et C'.

Si C' est ouvert, la dernière inégalité est stricte et H sépare strictement les convexes.

Remarque: On peut noter que l'on ne peut pas faire mieux, penser que dans le plan affine euclidien, si C est l'intérieur d'un cercle et C' le demi-plan défini par une tangente au cercle, la tangente au cercle est la seule droite séparant les deux convexes.

Exercices du chapitre XII

Exercice 1

Dans le plan affine euclidien, montrer que l'intérieur d'une parabole est une partie convexe.

Exercice 2

Dans le plan affine euclidien, montrer que l'intérieur d'une ellipse est une partie convexe.

Exercice 3

Dans le plan affine euclidien, montrer que la partie du plan délimitée par une branche d'hyperbole est une partie convexe.

Exercice 4

Dans un espace affine euclidien, on se donne n droites. Montrer que l'ensemble des points dont la somme des distances à ces droites est inférieure ou égale à c , c constante positive fixée est une partie convexe.

Exercice 5

Montrer que l' adhérence et l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

Exercice 6

E est un espace affine euclidien de dimension n, montrer que la distance d'un point à un demi-espace est soit 0 soit égale à la distance à l' hyperplan le définissant.

Dans le plan affine euclidien, on considère un triangle ABC, les points A, B, C constituant un repère affine. Exprimer la distance d'un point au triangle définie comme la distance à l'enveloppe convexe engendrée par les points A, B et C .

Exercice 7

Soient E un espace affine euclidien , C et C' sont deux parties convexes fermées et disjointes dont l'une est compacte.
Montrer que l'on peut séparer strictement ces deux convexes.
En considérant dans le plan une branche d'hyperbole et une asymptote montrer que le résultat précédent est en défaut lorsque la propriété de compacité n'est pas vérifiée.

Exercice 8 *(Lemme de Kakutan)*

Soient E un espace affine euclidien , C et C' sont deux parties convexes disjointes. Soit x un point de E n'appartenant pas à l'union de C et C'. On note $\Gamma = \mathrm{Conv}(C, x)$ et $\Gamma' = \mathrm{Conv}(C', x)$.
Montrer que si Γ et C' ont au moins un point commun, alors Γ' et C sont disjoints.
Pour cela, on choisira un point y dans Γ et C' et un point z dans Γ' et C et on montrera qu'il existe un point dans C et C'.

Exercice 9

Soient E un espace affine euclidien et A une partie convexe fermée de E.
Si x est un point de A, on désigne par A(x) l'union de toutes les droites passant par x et contenues dans A.

1) Montrer que soit A(x) est vide, soit A(x) est une VLA de E. Montrer que si A(x) et A(y) sont non vides, alors elles sont parallèles.
2) Soit x un point de A tel que A(x) est non vide, on note $\vec{V}$ la direction de la VLA A(x) et soit $\vec{W}$ un sous espace vectoriel supplémentaire de $\vec{V}$.
On pose $W = x + \vec{W}$ (c'est à dire la VLA passant par x et de direction $\vec{W}$).

a)Montrer que $A \cap W$ est un convexe ne contenant aucune droite

b)A est l'ensemble des VLA de direction $\vec{V}$ passant par les points de $A \cap W$.

Exercice 10

Soient E est un espace affine euclidien, A une partie convexe ouverte de E et V une VLA de E disjointe de A. On se propose de montrer une forme équivalente du théorème le Hahn-Banach qui est l'existence d'un hyperplan H contenant V et disjoint de A.

1) Que peut-on dire lorsque dimension de V est 0 ?

2) On choisit un point x de V, on note $\vec{V}$ la direction de la VLA et soit $\vec{W}$ un sous espace vectoriel supplémentaire de $\vec{V}$ .On pose $W = x + \vec{W}$ (c'est à dire la VLA passant par x et de direction $\vec{W}$).
En considérant la projection orthogonale sur W, montrer la propriété.

Solutions des exercices du chapitre XII

Exercice 1

Un repère cartésien orthonormé étant choisi, l'équation d'une parabole est $y^2=2px$ avec $p>0$. Dans ce cas l'intérieur P de la parabole est l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que $y^2-2px<0$.
Si $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont deux points de P, et si a est un réel de [0 1] le barycentre G de (M_1, α) et $(M_2, 1-\alpha)$ a pour coordonnées $(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)$.
La fonction puissance au carré est convexe puisque la dérivée seconde (2) est positive par conséquent :

$$(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)^2 \leq \alpha y_1^2+(1-\alpha)y_2^2 < \alpha 2px_1+(1-\alpha)2px_2=2p(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$$

Ainsi P est convexe.
On notera que l'adhérence de P est aussi convexe puisque cela revient dans la démonstration à changer l'inégalité large par l'inégalité stricte.

Exercice 2

Sur un repère cartésien orthonormé l'équation d'une ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. On note E l'intérieur de l'ellipse, c'est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$.
Si M_1 et M_2 sont deux points de E de coordonnées respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et si α est un réel de l'intervalle [0 1], on note $M = \text{bary}\{(M_1, \alpha), (M_2, 1-\alpha)\}$ alors en utilisant deux fois l'inégalité de convexité de la fonction puissance au carré, on obtient:

$$\frac{(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)^2}{a^2}+\frac{(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)^2}{b^2} \leq \frac{\alpha x_1^2+(1-\alpha)x_2^2}{a^2}+\frac{\alpha y_1^2+(1-\alpha)y_2^2}{b^2}.$$

Puisque M_1 et M_2 sont dans E on a :

$$\frac{(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)^2}{a^2}+\frac{(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)^2}{b^2} < \alpha 1+(1-\alpha)1 = 1,$$

Ainsi E est convexe et l'adhérence de E aussi.

Exercice 3

Sur un repère cartésien orthonormé l'équation d'une hyperbole est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. On note H l'intérieur de l'hyperbole, H est l'union de deux parties H^+ et H^- définies par les deux branches de l'hyperbole:

* H^+ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1$ et $x>0$.

* H^- est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ et $x<0$.
D'autre part, la fonction inverse (1/x) ayant pour dérivée seconde ($2/x^3$)est convexe si x est positif et concave si x est négatif (on rappelle qu'une fonction est concave si et seulement si son opposée est convexe).

1)Etude de H^+.

Si M_1 et M_2 sont deux points de H^+ de coordonnées respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et si α est un réel de l'intervalle [0 1], on note M = bary{(M_1, α), $(M_2, 1-\alpha)$}.
On a puisque M_1 (resp. M_2) est dans H^+, $(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b})(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) > 1$, les deux termes du produit sont positifs puisque l'un des deux est positif et qu' ils sont de même signe et de plus $\frac{1}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}} < \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}$.
En utilisant l'inégalité de convexité de la fonction inverse et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{\frac{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2}{a} + \frac{\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2}{b}} = \frac{1}{\alpha(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) + (1-\alpha)(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b})} \leq \frac{\alpha}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}} + \frac{1-\alpha}{\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}}$$

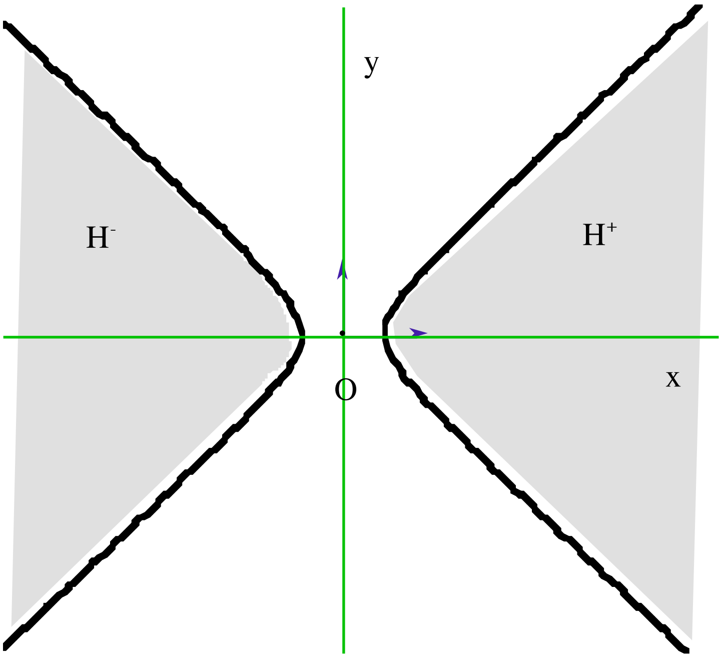
soit,

$$\frac{1}{\alpha(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) + (1-\alpha)(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b})} < \alpha\,(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}) + (1-\alpha)(\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b})$$

la dernière relation étant égale à $\frac{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2}{a} - \frac{\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2}{a}$.

2)Etude de H^-.

On fait une démonstration similaire. Dans ce cas si M_1 (resp. M_2) est dans H^-, on a toujours $(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b})(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) > 1$, les deux termes du produit sont négatifs puisque l'un des deux est négatif et qu' ils sont de même signe et de plus $\frac{1}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}} > \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}$.On utilise alors la propriété de concavité de la fonction inverse.
Noter que dans ce cas l'adhérence de H^+ et de H^- sont aussi convexes.



Exercice 4

On note D_i $1 \leq i \leq n$ les droites données de l'espace affine euclidien E et C l'ensemble des points M du plan tels que $\sum_{i=1}^{i=n} d(M, D_i) \leq c$.

Si D est une droite du plan et si M est un point du plan, la distance de M à la droite D est la norme du vecteur $\|\overrightarrow{MH}\|$ lorsque H désigne la projection orthogonale de M sur D.

On considère deux points du plan M et M', H et H' respectivement les projections de M et M' sur la droite D, et α un réel donné. L'application projection étant affine, la projection K du barycentre G = bary{(M, α), (M', (1-α)} est le barycentre bary{(H, α), (H', (1-α)}.

Ainsi on a $\alpha\overrightarrow{MG} + (1-\alpha)\overrightarrow{M'G} = 0$ et $\alpha\overrightarrow{HK} + (1-\alpha)\overrightarrow{H'K} = 0$ et par différence on obtient $\alpha\overrightarrow{MH} + (1-\alpha)\overrightarrow{M'H'} = \overrightarrow{GK}$.

Si α est dans l'intervalle [0 1] on obtient l'inégalité $\|\overrightarrow{GK}\| \leq \alpha\|\overrightarrow{MH}\| + (1-\alpha)\|\overrightarrow{M'H'}\|$ et par conséquent d(G, D) ≤ α d(M, D)+(1-α) d(M', D).

Compte tenu des résultats préliminaires, on peut démontrer la propriété.

Si M et M ' sont deux éléments de C et a un réel de l'intervalle [0 1] et si G = bary{(M, α), (M', (1-α)} alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n} d(G, D_i) \leq \alpha \sum_{i=1}^{i=n} d(M, D_i) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{i=n} d(M', D_i) \leq \alpha c + (1-\alpha)c = c$$

Ainsi C est soit vide soit un ensemble convexe.

Exercice 5

On peut remarquer que si E est un espace affine euclidien, alors E est un espace métrique et les boules sont définies par des sphères. Soit C une partie convexe d'un espace affine euclidien de dimension n, on note classiquement $\overline{C}$ l'adhérence de C et $\overset{o}{C}$ l'intérieur de C.

*** Etude de l'adhérence de C.**

Puisque C est non vide et que $\overline{C}$ contient C, $\overline{C}$ est aussi non vide. Si x et y sont deux éléments de $\overline{C}$ et α un réel de l'intervalle [0 1] alors il existe une suite de terme général x_n d'éléments de C convergeant vers x et il existe une suite de terme général y_n d'éléments de C convergeant vers x.

C étant convexe, z_n=bary{ (x_n, α), $(y_n, (1-\alpha))$}est dans C et la suite de terme général z_n converge vers bary{ (x, α), $(y, (1-\alpha))$}. Ainsi bary{ (x, α), $(y, (1-\alpha))$}. est dans $\overline{C}$ et $\overline{C}$ est convexe.

*** Etude de l'intérieur de C.**

Si $\overset{o}{C}$ est non vide, la convexité est une conséquence directe de la proposition de la page 211.

On peut faire la remarque suivante : $\overset{o}{C}$ peut être vide, un point est un convexe et d'intérieur vide, un segment de droite dans le plan affine est convexe et d'intérieur vide.

Exercice 6

1) Soit H un hyperplan de l'espace affine euclidien E. On note $\vec{u}$ un vecteur de $\vec{H}^{\perp}$, alors si m est un point de l'hyperplan, H est l'ensemble des points x de E tels que $(\overrightarrow{xm} / \vec{u})=0$.

H définit deux demi-espaces : H^+, ensemble des points x de E tels que $(\overrightarrow{xm} / \vec{u})>0$ et H^-, ensemble des points x de E tels que $(\overrightarrow{xm} / \vec{u})< 0$.

On se propose d'étudier la distance d'un point y de E au convexe H^+.

* Si y est dans H^+, la distance est nulle.

* Si y n'est pas dans H^+, on note y_H la projection orthogonale de y sur H. Soit z un point de H^+, et z_D la projection orthogonale de z sur la droite passant par y_H et de direction $\vec{u}$ alors, z_D est dans H^+ et $\|\overrightarrow{yz_D}\|\leq\|\overrightarrow{yz}\|$ puisque le triangle yzz_D est rectangle en z_D.

Ainsi $\|\overrightarrow{yy_H}\|\leq\|\overrightarrow{yz_D}\|\leq\|\overrightarrow{yz}\|$ et la distance de y à H^+ est $\|\overrightarrow{yy_H}\|$ soit la distance de y à H.

(On aurait pu conclure immédiatement en utilisant le fait que la frontière du demi-espace est H).

2) Dans le plan affine euclidien, on considère un repère affine (A, B, C) l'enveloppe convexe conv({A, B, C}) est l'ensemble des barycentres formés à partir des trois points et des coefficients positif.

Les points A et B définissent une droite, cette droite définit une partition du plan, le demi-plan fermé contenant C que l'on notera H_{AB} et son complémentaire. Un point M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère est dans H_{AB} si et seulement si $\gamma \geq 0$.

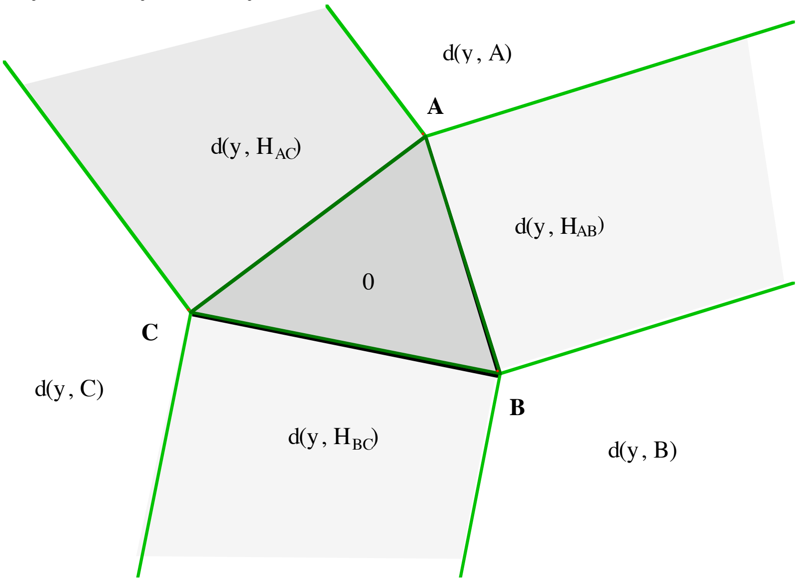
Ainsi conv({A, B, C}) est l'intersection des trois demi-plan fermés H_{AB}, H_{AC}, H_{BC} et par conséquent conv({A, B, C}) est un convexe fermé.

Compte tenu des résultats précédents, si y est un point n'appartenant pas à H_{AB}(respectivement H_{BC} et H_{AC}) et si la projection orthogonale y'=P_{AB}(y) de y sur la droite (AB) (resp. (BC) et (AC)) est sur le segment [A B] (y' est barycentre des points A et B affectés de coefficients positifs) alors la distance de y à conv({A, B,C}) est $\|\overrightarrow{yy'}\|$.

D'autre part, on sait que si C est un convexe fermé et y un point n'appartenant pas à C, la projection sur C est la projection de y sur la frontière de C.
La frontière de C = conv({A, B, C}) est composée des points appartenant aux côtés du triangle. Si y n'est pas dans C et si sa projection n'est pas sur un côté elle est nécessairement sur un sommet.

La distance d'un point y à conv({A, B, C}) est par conséquent :

* 0 si y est dans conv({A, B, C}).
* d(y, P_{AB}(y)), si y n'est pas dans H_{AB} et si P_{AB}(y) est dans [A B].
* d(y, P_{AC}(y)), si y n'est pas dans H_{AC} et si P_{AC}(y) est dans [A C].
* d(y, P_{BC}(y)), si y n'est pas dans H_{BC} et si P_{BCB}(y) est dans [B C].
* Inf{d(y, A), d(y, B), d(y, C) }dans les autres cas.



Exercice 7

* **Résultat préliminaire** : Si C est une partie convexe fermée, l'application qui à x point de E associe la distance d(x, C) est lipschitzienne donc continue.
En effet, si x et y sont dans E et z un point de C, alors d(x, C) = $\|\overrightarrow{xx_C}\|$ où x_C désigne la projection de x sur C.
On a d(x, C) = $\|\overrightarrow{xx_C}\| \leq \|\overrightarrow{xz}\| \leq \|\overrightarrow{xy}\| + \|\overrightarrow{yz}\|$ et d(x, C) ≤ $\|\overrightarrow{xy}\|$+d(y, C) et par conséquent d(x, C) - d(y, C) ≤ $\|\overrightarrow{xy}\|$.

On démontre de la même façon que $d(y, C) - d(x, C) \leq \|\overrightarrow{xy}\|$ et par conséquent si x et y sont dans E on a l'inégalité $|d(y, C) - d(x, C)| \leq \|\overrightarrow{xy}\|$.

* **Démonstration :**

La fonction distance définie sur le compact K est continue et par conséquent il existe un élément y de K tel que $d(y, C) = \text{Inf}\{d(x, C) / x \text{ est dans } K\}$.
Puisque C et K sont disjoints et que C est fermé, y ne peut pas appartenir à C et de plus $d(y, C) \neq 0$.
Soit H l'hyperplan médiateur de y et y_C projection de y sur C, alors si m est le milieu de y et y_C, H est l'ensemble des points u de l'espace tels que $(\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{mu}) = 0$.

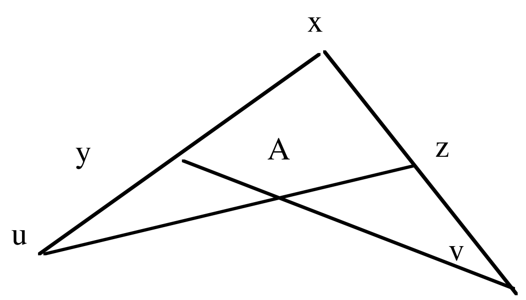
Montrons que H sépare strictement K et C.
Si u est dans C alors pour tout λ dans l'intervalle [0, 1] le point x = bary{(u, λ), (y_C, 1-λ))}est dans C et $\|\overrightarrow{yx}\|^2 \geq \|\overrightarrow{yy_C}\|^2$ et $\|\overrightarrow{y_C x}\|^2 + 2(\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{y_C x}) \geq 0$.
Ainsi, $\lambda^2 \|\overrightarrow{uy_C}\|^2 + 2\lambda(\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{y_C u}) \geq 0$ et $(\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{y_C u}) \geq 0$.
Puisque m est le milieu de y y_C, on obtient :
$(\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{mu}) \geq (\overrightarrow{yy_C} / \overrightarrow{my_C}) = 2\|\overrightarrow{my_C}\|^2 > 0$ ce qui prouve que u n'est pas dans H et par conséquent $H \cap C = \emptyset$.
On démontre de la même façon que $H \cap K = \emptyset$.

La démonstration précédente repose sur le fait que la distance entre les deux convexes est non nulle .
Si on considère dans le plan affine euclidien une branche d'hyperbole et une asymptote alors la partie convexe fermée définie par la branche d'hyperbole est un convexe fermé mais non borné, l' asymptote est une droite donc un convexe fermé et non borné.
Ces deux convexe sont disjoints et la seule droite qui les séparent est l'asymptote et la séparation n'est pas stricte.

Exercice 8

Si C est une partie convexe et x un point de E, l'enveloppe convexe Conv(C, x) est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs formés à partir de x et d'un point de C et par conséquent un point de Γ est toujours sur un segment d'extrémités x et un point de C.

Pour démontrer la propriété, on fait un raisonnement par l'absurde et par conséquent on suppose qu'il existe un point y dans Γ et dans C' et un point z dans Γ' et dans [] C et il faut aboutir à une contradiction.



Si y est dans Γ et C', il existe un point u de C tel que le segment [x u] contienne y, de même si z est dans Γ' et C, il existe un point v de C tel que le segment [x v] contienne z.
On a l'alternative :

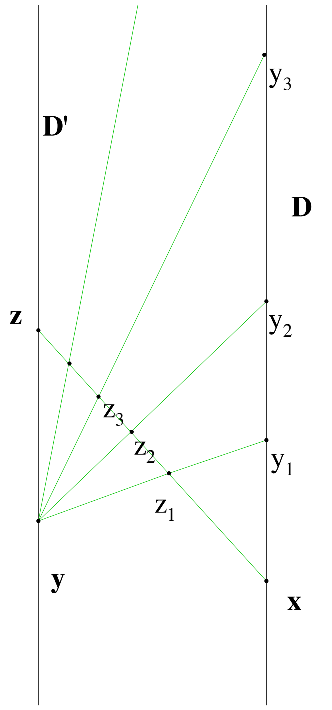
* Les points x, u, v sont alignés.
  - Si x est dans le segment [u v] , x est dans C et C' ce qui est impossible .
  - Sinon soit u est dans C', soit v est dans C , ce qui est impossible puisque C et C' sont disjoints.
* Les points x, u, v ne sont pas alignés et définissent un plan. Dans ce plan, on considère les droites (yv) et (zu) alors :
  - Si elles sont parallèles y = u et z = v ce qui est impossible puisque C et C' sont disjoints.
  - Sinon elles se coupent en un point A, A est à l'intérieur du triangle xuv (A est barycentre des points x, u, v affectés de coefficients positifs) et par conséquent A est sur les segments [y v] et [z u] donc A est dans C et C' ce qui est impossible.

Exercice 9

1) Si A(x) n'est pas vide, A(x) contient au moins une droite. Si y et z sont deux points de A(x), et si α est un réel, on note u = bary{(y, α), (z, 1-α)}. Les droites (xy) et (xz) sont dans A et il faut montrer que la droite (xu) est aussi dans A. Si t est un point de la droite (xu) alors il existe λ réel tel que $\vec{xt} = \lambda\vec{xu} = \lambda\alpha\vec{xy} + \lambda(1-\alpha)\vec{xz}$.

On a l'alternative :

* Si λ est positif t est dans [y z] et t est dans A.
* Si λ est négatif $\vec{xt} = \lambda\vec{xu} = -\lambda\alpha\vec{yx} - \lambda(1-\alpha)\vec{zx} = -\lambda\alpha\vec{xy'} - \lambda(1-\alpha)\vec{xz'}$, avec y' sur la droite (xy) et z' sur la droite (xz), dont t est dans A.



Si x et y sont deux points de A et si A(x) et A(y) sont non vides, on note $\vec{V}$ la direction de la VLA A(x) et $\vec{V'}$ la direction de la VLA A(y) . Si $\vec{v}$ est dans $\vec{V}$, la droite D passant par x et de direction $\vec{v}$ est dans A(x). On note D' la droite passant par y et de direction $\vec{v}$. Si z ≠ y est dans D', on considère la suite de points z_n= bary{(z,1-1/n), (x,1/n)}et la suite de points y_n définie par y_n est l'intersection de la droite (yz_n) et de la droite D. Alors pour tout n, z_n est dans A et la suite z_n converge vers z donc puisque A est fermé z est dans A. Ainsi, $\vec{yz}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et la droite (yz) est dans A(y) donc $\vec{v}$ est dans $\vec{V'}$.
On montre de façon analogue que tout

vecteur de $\vec{V'}$ est dans $\vec{V}$ et par conséquent $\vec{V'} = \vec{V}$ et les VLA , A(x) et A(y) sont parallèles.

On peut remarquer par conséquent que l'on a l'alternative, soit A(x)=A(y), soit a(x) est disjointe de A(y).
En fait, A(x) est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence d'égalité lorsque $\vec{V}$ est réduite à 0 et si $\vec{V}$ n'est pas réduite à 0, pour la relation la droite (xy) est dans A .

2) a)L'intersection de deux parties convexes est un convexe donc $A \cap W$ est un convexe. De plus $A \cap W$ est fermé et contient x.
Si D est une droite contenue dans $A \cap W$, on suppose que y est dans D et que $\vec{u}$ est vecteur directeur de D. Alors A(y) est non vide et comme A(x) et A(y) sont parallèles $\vec{u}$ est dans $\vec{V}$ ce qui est en contradiction avec la propriété soit $\vec{W}$ un sous espace vectoriel supplémentaire de $\vec{V}$.

b)Soit y un point de $A \cap W$, la VLA passant par y et de direction $\vec{V}$ est $y+\vec{V}$ = A(y) est dans A.
Réciproquement, si y est dans A, A(y) = $y+\vec{V}$ .On considère la projection y' de y sur W parallèlement à $\vec{V}$. Alors y' = $y+\vec{yy'}$ et y' est dans A(y).
Ainsi, comme A(y)=A(y') et que y' est dans $A \cap W$, y est dans la VLA passant par y' et de direction $\vec{V}$.

Exercice 10

E est un espace affine euclidien de dimension n , V une VLA de E et A une partie convexe de E.
1) Si V est de dimension 0, V est réduite à un point, on est ramené au théorème de Hahn-Banach.
Si V est de dimension n-1, V est un hyperplan affine et V vérifie la propriété.
2) On suppose que V est une VLA de dimension k différente de 0 et n-1. V est non vide et soit x un point de V, on note $\vec{V}$ la direction de la VLA et soit $\vec{W}$ le sous espace vectoriel supplémentaire et orthogonal de $\vec{V}$ .On pose W = x +$\vec{W}$ (c'est à dire la VLA passant par x et de direction $\vec{W}$).
On note Π l'application projection orthogonale sur W alors :

* Π(V)={x}.
* Π est une application affine et par conséquent l'image du convexe A est un convexe ; Π(A) est une partie convexe.
* Π est une projection orthogonale donc l'image d'une sphère est une sphère de même rayon. A étant ouverte , A est une union de boules ouvertes donc Π(A) est un ouvert (une boule ouverte est l'ensemble des points intérieurs d'une sphère).

Ainsi dans W, Π(A) est une partie convexe ouverte et Π(V) est un point on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une VLA G de dimension k-1 contenant x et disjointe de Π(A).
L'hyperplan de E, H contenant G et parallèle à V contient V et est disjoint de $\Pi^{-1}(A)$ et par conséquent disjoint de A.