Chapitre II - LES VARIETES LINEAIRES AFFINES

Les variétés linéaires affines appelées aussi sous espaces affines, sont le pendant dans les espaces affines, des sous espaces vectoriels dans les espaces vectoriels.

1) Généralités.

Définition : Soit (X, $\vec{X}$) un espace affine et V une partie non vide de X. On dira que V est une variété linéaire affine de X (En abrégé VLA) si la propriété suivante est vérifiée:
Si $a_0, a_1, \dots, a_n$ est une famille de points de V et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ une famille de scalaires (éléments du corps de référence) de somme non nulle, alors le barycentre de la famille pondérée par les coefficients est dans V.

On appellera cette propriété caractéristique des VLA la stabilité par barycentre . Noter qu'un sous espace vectoriel est par définition un sous ensemble stable par combinaisons linéaires, ainsi la notion de stabilité par barycentre est le pendant dans les espaces affines de la notion de stabilité par combinaison linéaire dans les espaces vectoriels.

On notera aussi que compte tenu de la propriété d'associativité des barycentres, on peut se contenter dans cette définition de considérer le barycentre de deux points.

Le théorème suivant va donner plusieurs définitions équivalentes de VLA :

Théorème : Soient (X, $\vec{X}$) un espace affine, V une partie non vide de E. et a_0 un point de V. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

i)Il existe un point a dans V, il existe $\vec{D}$ sous espace vectoriel de $\vec{X}$ tel que V= a + $\vec{D}$.

ii) L'ensemble $\{\overrightarrow{xa_0}$ / x dans V $\}$est un sous espace vectoriel de $\vec{X}$.

iii) Si b est dans V alors, $\{\overrightarrow{xb}$ / x ΔANS V $\}$est un sous espace vectoriel de$\vec{X}$.

iv) V est une VLA de X.

Les sous espaces vectoriels définis en i), ii), et iii) sont tous égaux et appelés la **direction de la VLA** i)⇒ii) Soient $\vec{xa_0}$, $\vec{ya_0}$ deux vecteurs tels que x, y sont dans V et deux scalaires α et β, alors $\alpha\, \vec{xa_0} + \beta \vec{ya_0} = \vec{za_0}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\alpha \vec{xa} + \beta \vec{ya} + (-\alpha - \beta + 1)\vec{a_0 a} = \vec{za}$$

Ainsi, $\vec{za}$ est dans $\vec{D}$ et z dans V.

ii)⇒iii)
Démonstration analogue à la précédente en remplaçant a par a_0 et a_0 par b.

iii)⇒iv)
Soient x, y ΔANS V deux points et α un scalaire on note z= bary{(x, α),(y,1-α)} alors,

$$\vec{bz} = \alpha \vec{bx} + (1 - \alpha)\vec{by}$$

comme { $\vec{xb}$ / x ΔANS V } est un sous espace vectoriel, z est dans V.
iv)⇒i)
Soient $\vec{xa_0}$, $\vec{ya_0}$ deux vecteurs tels que, x, y sont dans V et deux scalaires α et β, alors on a la relation : $\alpha\, \vec{xa_0} + \beta \vec{ya_0} = \vec{za_0}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\alpha \vec{xa} + \beta \vec{ya} + (1 - \alpha - \beta)\vec{a_0 a} = \vec{za}$$

Ainsi z est barycentre et z est dans V .Par conséquent, { $\vec{xa_0}$ / x ΔANS V }est un sous espace vectoriel de $\vec{X}$ noté $\vec{D}$ et V= $a_0 + \vec{D}$

Notations :

Si V est une VLA de direction $\vec{V}$, la dimension de V est la dimension de $\vec{V}$ notée dimV.

On dira que :

* V est un point si et seulement si dimV = 0.
*V est une droite affine si et seulement si dimV = 1.
* V est un plan affine si et seulement si dimV = 2.
* V est un hyperplan affine si et seulement si codimV = 1 (la codimension est la dimension d'un supplémentaire).

Conséquences:

1) Si V est une VLA, V est un espace affine d'espace vectoriel associé $\vec{V}$.

2) Si X est espace vectoriel, considéré comme espace affine sur lui même, et si V est une VLA de X, le point i) permet d'affirmer que V= a + $\vec{D}$ et par conséquent, V est le translaté d'un sous espace vectoriel de X.
Réciproquement, les VLA de X contenant 0 sont des sous espaces vectoriels de X.

3) Une VLA est définie à partir d'un point et d'un sous espace vectoriel, on a l'écriture V= a + $\vec{D}$.

Définition :Soit $(X, \vec{X})$ un espace affine, V et V' deux VLA de direction respectivement $\vec{V}$ et $\vec{V'}$.
On dira que V et V' sont **parallèles** si et seulement si elles ont même direction c'est à dire si $\vec{V} = \vec{V'}$.
On dira que V et V' sont **faiblement parallèles** si et seulement si $\vec{V}$ est contenu dans $\vec{V'}$ ou $\vec{V'}$ est contenu dans $\vec{V}$.
On dira que V et V' sont supplémentaires si et seulement si leurs directions le sont.

Ainsi, dans un espace affine de dimension 3, deux plans sont parallèles et une droite et un plan sont (faiblement)parallèles.
Une droite et un plan peuvent être supplémentaires.

2) VLA engendrée.

Si A est une partie non vide de X, il est naturel de rechercher s'il existe une plus petite VLA contenant A pour la relation d'ordre d'inclusion. La réponse est positive et est liée au théorème suivant :

Théorème : " stabilité par intersection"
Soit $(X, \vec{X})$ un espace affine et $\{V_i$ / i dans I$\}$ une famille de VLA de X indexée par l'ensemble d'indice I alors, l'intersection des VLA de la famille notée $\bigcap_{i \in I} V_i$ est soit vide soit une VLA de direction $\bigcap_{i \in I} \vec{V}_i$.

En effet, si $\bigcap_{i \in I} V_i$ est non vide il faut montrer que l'ensemble $\{\vec{xy}$ / x, y sont dans $\bigcap_{i \in I} V_i\}$est égal à $\bigcap_{i \in I} \vec{V}_i$.

Si x et y sont des points de $\bigcap_{i \in I} V_i$, alors pour tout i dans I, les points x, y sont dans V_i et le vecteur $\vec{xy}$ est dans $\vec{V}_i$ et par conséquent dans $\bigcap_{i \in I} \vec{V}_i$.
Réciproquement, si $\vec{u}$ est dans $\bigcap_{i \in I} \vec{V}_i$ alors pour tout i dans I, le vecteur $\vec{u}$ est dans $\vec{V}_i$ et si x est un point de $\bigcap_{i \in I} V_i$ avec $\vec{u} = \vec{xy}$ alors , y ΔANS V_i et le résultat.

Ce résultat permet de définir la VLA engendrée.

Définition de la VLA engendrée:
Si A est une partie non vide de X, on considère l'ensemble des VLA contenant A. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient X et grâce à l'axiome du choix, on peut l'indexer par un ensemble d'indice I. Ainsi, $\{V_i$ / i dans I$\}$ est la famille des VLA de X

contenant A et d'après le théorème précédant, $\bigcap_{i\in I} V_i$ est une VLA non vide contenant A.

Cette VLA est appelée la VLA engendrée par A et notée **Aff(A).**

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de Aff(A).

Théorème : Si A est une partie non vide de X, alors Aff(A) est l'ensemble des barycentres formés à partir de points de A et sa direction est l'espace vectoriel engendré à partir des vecteurs formés avec des éléments de A noté Vect $\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in A\}$.

L'ensemble des barycentres formés à partir de points de A est contenu dans Aff(A) puisque Aff(A) est une VLA contenant A.
Réciproquement, l'ensemble des barycentres formés à partir de points de A , contient A et est une VLA (c'est une conséquence de la propriété d'associativité des barycentres).
D'autre part, $\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in A\}$ est contenu dans $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(A)}$ et par conséquent Vect$\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in A\}$ aussi.

Exemples:

1) Si x, y sont deux points distincts de l'espace affine X, , Aff({x, y}) est la droite affine passant par x et de direction xyÍ .

2) Si x, y , z sont trois points de X avec $x \neq y$ et z n'est pas dans Aff({x, y}) alors Aff({x, y, z}) est le plan affine passant par x et de direction Vect$\{\vec{xy}, \vec{xz}\}$.

3) Si A est une famille de p+1 points, $A =\{a_0 , a_1, ..., a_P \}$ alors Aff(A) est une VLA de direction Vect $\{\overrightarrow{a_0a_1},\ldots\ldots,\overrightarrow{a_0a_p}\}$.

Comme dans le cadre vectoriel , l'union de deux VLA n'est pas une VLA. Que peut-on dire de la VLA engendrée par deux VLA ? Le théorème suivant répond à cette question.

Le Théorème d'incidence : Si V_1 et V_2 sont deux VLA de X, alors :

-Si $V_1 \cap V_2$ n'est pas vide, la dimension de Aff($V_1 \cup V_2$) est $\dim(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$.

-Si $V_1 \cap V_2$ est vide, la dimension de Aff($V_1 \cup V_2$) est $\dim(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)+1$.

En effet, la direction de Aff($V_1 \cup V_2$) est Vect$\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in V_1 \cup V_2\}$ ainsi ;

- Si $V_1 \cap V_2$ n'est pas vide, il existe un point z dans $V_1 \cap V_2$ et si x, y sont dans $V_1 \cup V_2$, le vecteur $\vec{xy} = \vec{xz}+\vec{zy}$ et par conséquent , $\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in V_1 \cup V_2\}$est contenu dans $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$. et Vect$\{\vec{xy} \mathbin{/} x, y \in V_1 \cup V_2\} \subset \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

Réciproquement, $\vec{V}_1$ est contenu dans Vect$\{\vec{xy}$ / x, y $\in V1 \cup V2\}$ et $\vec{V}_2$ est contenu dans Vect$\{\vec{xy}$ / x, y $\in V_1 \cup V_2\}$et par conséquent, $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.est contenu dans Vect$\{\vec{xy}$ / x, y $\in V_1 \cup V_2\}$.

- Si $V_1 \cap V_2$ est vide, on choisit un point x_0 de V_1 et un point y_0 de V_2 .Ainsi, si x, y sont dans $V_1 \cup V_2$ alors, $\vec{xy} = \vec{xx_0} + \vec{x_0y_0} + \vec{y_0y}$ et par conséquent, le sous espace vectoriel Vect $\{\vec{xy}$ / x, y $\in V_1 \cup V_2\}$est contenu dans Vect$\{\vec{x_0y_0}\} + \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.
Réciproquement, les sous espaces vectoriels, Vect$\{\vec{x_0y_0}\}$, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ sont dans Vect $\{\vec{xy}$ / x, y $\in V1 \cup V2\}$et par conséquent Vect$\{\vec{x_0y_0}\} + \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ est contenu dans Vect $\{\vec{xy}$ / x, y $\in V1 \cup V2\}$.

Noter que si $\vec{x_0y_0}$ est dans $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ alors $\vec{x_0y_0} = \vec{x_0z} - \vec{y_0t}$ avec z dans V_1 et t dans V_2 , ainsi t = z ce qui est impossible et par conséquent, $\vec{x_0y_0}$ n'est pas dans $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

Conséquences :

1) Si E_2 est le plan affine et si D_1 et D_2 sont deux droites du plan, alors :

- Si $D_1 \cap D_2$ n'est pas vide, (les droites se coupent) alors on a l'alternative :

  - Les droites sont parallèles , dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) = 1 et les droites sont confondues.
  - Les droites ne sont pas parallèles, dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) =2 et Aff($D_1 \cup D_2$) = E_2.

- Si $D_1 \cap D_2$ est vide (les droites ne se coupent pas) alors on a l'alternative :

  - Les droites sont parallèles , dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) = 2 et les droites engendrent le plan, Aff($D_1 \cup D_2$) = E_2.
  - Les droites ne sont pas parallèles , dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) = 3 situation impossible en dimension 2.

2) Si E_3 est un espace affine de dimension 3 et si D_1 et D_2 sont deux droites de l'espace alors :

- Si $D_1 \cap D_2$ n'est pas vide, (les droites se coupent) alors on a l'alternative:
  - Les droites sont parallèles, dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) = 1 et les droites sont confondues.
  - Les droites ne sont pas parallèles, dim(Aff($D_1 \cup D_2$)) = 2 et Aff($D_1 \cup D_2$) est un plan affine.

- Si $D_1 \cap D_2$ est vide , (les droites ne se coupent pas) alors on a l'alternative:

- Les droites sont parallèles, dim($Aff(D_1 \cup D_2)$) = 2 et les droites engendrent un plan affine.
- Les droites ne sont pas parallèles, dim($Aff(D_1 \cup D_2)$) = 3 alors $Aff(D_1 \cup D_2) = E_3$ les droites engendrent l'espace affine.

3) Soient X un espace affine et deux VLA Y et Z dont les directions sont supplémentaires, alors $Y \cap Z$ est un singleton (un singleton est un ensemble ayant un unique élément).

En effet, si $\vec{Y} \oplus \vec{Z} = \vec{X}$ alors, $\vec{Y} \cap \vec{Z} = \{ 0 \}$ et on a l'alternative, soit $Y \cap Z$ est non vide et c'est un singleton, soit $Y \cap Z$ est vide et la dimension de $Aff(Y \cup Z)$ est dim(X) +1 situation impossible, ainsi, $Y \cap Z$ est un singleton.

Par exemple, dans l'espace E_3 , un plan affine étant donné, une droite de l'espace est soit dans le plan, soit parallèle au plan , soit coupe le plan en un point unique.

On notera que cette propriété est importante, elle est à l'origine de la construction de la notion de projection , de symétrie et d'affinité.

3) Coordonnées barycentriques et cartésiennes, repères.

I) Repères affines et coordonnées barycentriques.

Les familles affinement génératrices, libres et les repères sont les pendants des familles génératrices, libres et des bases du cadre vectoriel dans le cadre affine.

Définition : Soit (E, $\vec{E}$) un espace affine de dimension n. Une famille finie de k+1 points, $a_0, a_1, ..., a_k$ est dite famille **affinement génératrice** si et seulement si tout point de E est barycentre de points de la famille.
Une famille finie de k+1 points, $a_0, a_1, ..., a_k$ est dite famille **affinement libre** si et seulement si la famille des vecteurs $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \ldots\ldots, \overrightarrow{a_0a_k}\}$ est une famille libre de $\vec{E}$.

On notera que la famille est affinement libre si et seulement si , $Aff\{ a_0, a_1, ..., a_k\} = E$.

Théorème : Si $\{a_0, a_1, ..., a_k\}$ est une famille de k+1 points de E, alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\{a_0, a_1, ..., a_k\}$est une famille affinement libre.

2) Il existe un indice i_0 dans$\{0,..,k\}$tel que la famille de vecteurs $\{ \overrightarrow{a_{i_0}a_j} \ / \ j \in \{0,..,k\}, j \neq i_0 \}$est une famille libre.

3) Si i est dans {0,..,k} alors, $\{ \overrightarrow{a_i a_j} \ / \ j\in\{0,..,k\}, j \neq i \}$est libre.
4) La dimension de $\mathrm{Aff}\{ a_0, a_1,..., a_k \}$ est k.

On rappelle que la direction de la VLA engendrée par les points est $\overrightarrow{\mathrm{Aff}}\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ $= \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{a_i a_j} / \ i, j\in\{0,..,k\}\}$et par conséquent, le seul point à démontrer est 2⇒3.

On suppose qu'il existe un indice i_0 dans {0,..,k}tel que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{a_{i_0} a_j} /$ $j\in\{0,..,k\}, j \neq i_0 \}$est une famille libre. Si. i est un indice de l'ensemble {0,..,k}, il s'agit de montrer que $\{\overrightarrow{a_i a_j} \ / \ j\in\{0,..,k\}, j \neq i \}$est une famille libre.

* Si $i = i_0$ la propriété est vraie.

ainsi $i \neq i_0$ on considère une combinaison linéaire nulle , $\sum_{j=0, j\neq i}^{j=k} \alpha_j \overrightarrow{a_i a_j} = 0$, en utilisant la relation de Chasles, on obtient $\sum_{j=0, j\neq i}^{j=k} \alpha_j (\overrightarrow{a_i a_{i_0}} + \overrightarrow{a_{i_0} a_j}) = 0$ et en regroupant,

On en déduit que si j est différent de i et de i_0 , alors $\alpha_j = 0$ et que $\sum_{j=0, j\neq i}^{j=k} \alpha_j = 0$ et le résultat.

On peut noter que si $\{ a_0, a_1,..., a_k \}$ est une famille affinement libre, alors pour i dans {0,..,k}, la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{a_i a_j} \ / \ j\in\{0,..,k\}, j \neq i \}$ est une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{Aff}}\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{a_i a_j} / \ i, j\in\{0,..,k\}\}$.

Remarque: Si $\{ a_0, a_1,..., a_k \}$ est une famille affinement libre, alors tout point de la famille n'est pas barycentre des autres points de la famille et que cette propriété est caractéristique des familles affinement libres.

Définition : Soit (E, $\vec{E}$) un espace affine de dimension n. Une famille finie de n+1 points, $a_0, a_1,..., a_n$ est un **repère affine** si et seulement si cette famille est affinement libre et génératrice.
Le repère affine sera noté $R = (a_0, a_1,..., a_n)$.

Compte tenu du théorème précédent il est clair qu'un repère affine en dimension n est composé de n+1 points.

Si $a_0, a_1,..., a_n$ est un repère affine alors tout point m de E est barycentre de points de la famille, il existe donc des scalaires $\alpha_0, \alpha_1,..., \alpha_n$ de somme non nulle tels que m = bary$\{(a_i,\alpha_i) \ ; i\in\{0,\ldots,n\}\}$, ainsi on a $(\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i)\overrightarrow{a_0 m} = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i \overrightarrow{a_0 a_i}$.

Conséquences :

- Si ($a_0, a_1,..., a_n$) est un repère affine, alors tout point du repère n'est pas barycentre des autres (sinon la famille ne serait pas libre).

- Si ($a_0, a_1,..., a_n$) est un repère affine, alors tout point m de E est barycentre des points du repère, il existe donc des scalaires $\alpha_0, \alpha_1,..., \alpha_n$ de somme non nulle tels que $(\sum_{i=0}^{i=n}\alpha_i)\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=0}^{i=n}\alpha_i\,\overrightarrow{a_0a_i}$. Comme la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{a_0a_j}\,/\ j\in\{1,..,n\}\}$.est une base, on montre facilement que les coefficients sont uniques à un facteur multiplicatif près. Ces coefficients sont appelés **les coordonnées barycentriques du point m dans le repère affine ($a_0, a_1,..., a_n$).**

Si l'on impose la condition $\sum_{i=0}^{i=n}\alpha_i = 1$, il y a bijection entre l'ensemble des points et l'ensemble des (n+1)-uplés de scalaires et ainsi on peut représenter les points de E par leurs coordonnées barycentriques.

Ainsi, bien que ce ne soit pas obligatoire, et afin de manipuler des représentations uniques, on a choisi de supposer que la **somme des coordonnées barycentriques est 1.**

Le théorème suivant donne une propriété très utile en pratique.

Théorème: Soient $(E,\vec{E})$ un espace affine et R= ($a_0, a_1,..., a_n$) un repère affine de E. Si x et y sont deux points de coordonnées barycentriques respectivement $\alpha_0, \alpha_1,..., \alpha_n$ et $\beta_0, \beta_1,..., \beta_n$ (de somme 1), alors si z = bary{ (x, λ), (y, $1-\lambda$)}, les coordonnées barycentriques de z sont $\lambda\,\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0$, $\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\beta_1$, ..., $\lambda\alpha_n+(1-\lambda)\beta_n$.

En effet, on a les relations , $\overrightarrow{a_0z} = \lambda\,\overrightarrow{a_0x} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{a_0y}$, $\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=0}^{i=n}\alpha_i\,\overrightarrow{a_0a_i}$ et $\overrightarrow{a_0y} = \sum_{i=0}^{i=n}\beta_i\,\overrightarrow{a_0a_i}$. Ainsi en utilisant la première relation et en additionnant, on obtient la propriété.

On peut noter que l'on obtient par différence, $\overrightarrow{xy} = \sum_{i=0}^{i=n}(\beta_i-\alpha_i)\overrightarrow{a_0a_i}$.Cette relation donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{xy}$ sur la base $\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \ldots\ldots, \overrightarrow{a_0a_n}$.

On remarquera que cette propriété particulièrement intéressante est liée au fait que les coordonnées barycentriques sont de somme 1.

II) Repères cartésiens et coordonnées cartésiennes.

On sait que lorsque l'on choisit un point origine O dans E, on donne une structure vectorielle à l'ensemble des points par conséquent, si l'on choisit une base de l'espace vectoriel $\vec{E}$ on pourra représenter les points m de E à partir des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{Om}$.

Définition: Soient $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension n et O un point de E, un repère cartésien R de E est la donnée du point O et d'une base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n$ de $\vec{E}$. Ainsi à tout point m de E on associe les n coordonnées du vecteur $\overrightarrow{Om}$ dans la base e_i.

Ces coordonnées sont appelées les **coordonnées cartésiennes** du point m dans le repère R.
Le repère cartésien sera noté R = (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n$).

III) Représentation analytique dans les repères.

Un point m d'un espace affine est représenté par une matrice unicolonne sur un repère. On distingue deux cas, le repère est affine et le repère est cartésien.

A) Repères affines.

Si (E, $\vec{E}$) un espace affine de dimension n et si R = ($a_0, a_1, \ldots, a_n$) est un repère affine de E, on représentera les points, les familles finies de points de E par des matrices de la façon suivante:
Si m est un point de E , on note $M_R(m) = {}^t[\alpha_0\ \alpha_1 \ldots\ \alpha_n]$ la matrice unicolonne représentant m dans le repère, les α_i étant les coordonnées barycentriques (de somme 1) de m.
Si m = ($m_1, m_2, \ldots, m_k$) sont k points de E , on note $M_R(m)$ la matrice ayant n+1 lignes et k colonnes obtenue à partir des matrices unicolonnes des points (noter que la somme des colonnes de cette matrice est formée de 1).

Remarque: Si x est un point de E représenté par la matrice unicolonne X et y un point de E représenté par la matrice Y alors si z = bary{ (x, λ), (y, $1-\lambda$)}, z est représenté par la matrice $\lambda X+(1-\lambda)Y$.

Théorème: Soit m = ($m_1, m_2, \ldots, m_k$) une famille de k points de E et R un repère affine, alors la famille m est affinement libre si et seulement si rang($M_R(m)$) = k.

En effet le rang de la matrice ne change pas lorsque l'on additionne toutes les lignes à la première ligne et lorsque l'on soustrait à chaque colonnes la première colonne.

Définition: Si R et R' sont deux repères affines , la matrice $M_R(R')$ est appelée matrice de changement du repère R en le repère R'.

Compte tenu du théorème précédent, $M_R(R')$ est inversible et de matrice inverse $M_{R'}(R)$.
D'autre part si m est un point de E et $M_R(m)$ la matrice le représentant, alors on a une formule de changement de repères :

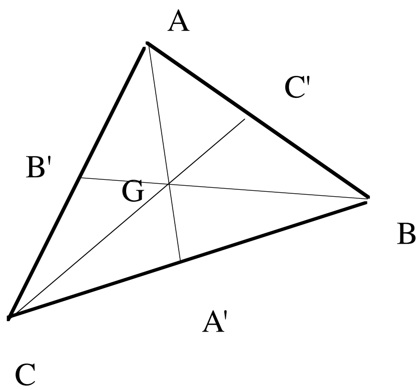
$$M_{R'}(m) = M_{R'}(R)M_R(m)$$

Ainsi que des formules analogues pour les familles de points.

Exemple: E_2 est le plan affine et A, B et C trois points non alignés. Ils constituent un repère affine R du plan affine. Si A' est le milieu de BC, B' le milieu de CA et C' le milieu de AB alors :

$$M_R(A'B'C')=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice étant non nul, (A', B', C') est un repère affine R' et si G est l'isobarycentre du triangle A'B'C', alors $M_R(G) = M_R(R')M_{R'}(G) = {}^t[1/3\ 1/3\ 1/3]$ et G est aussi l'isobarycentre du triangle ABC.



B) Repères cartésiens.

Si $(E, \vec{E})$ est un espace affine de dimension n et si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de E, on représentera les points, les familles finies de points de E par des matrices de la façon suivante:
Si m est un point de E , on note $M_R(m)={}^t[1\ \ x_1 \ldots\ \ x_n]$ la matrice unicolonne représentant m dans le repère, les x_i étant les coordonnées du vecteur $\vec{Om}$ sur la base e.

Si $m = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ sont des points de E , on note $M_R(m)$ la matrice ayant n+1 lignes et k colonnes obtenue à partir des matrices unicolonnes des points (noter que la première ligne de cette matrice est formée de 1).

Remarque: Si x est un point de E représenté par la matrice unicolonne X et y un point représenté par la matrice Y alors $z = \text{bary}\{(x, \lambda), (y, 1-\lambda)\}$ est représenté par la matrice $\lambda X+(1-\lambda)Y$.

Théorème: Soit $m = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ une famille de k points de E et R un repère cartésien, alors la famille m est affinement libre si et seulement si $\text{rang}(M_R(m)) = k$.

En effet le rang de la matrice ne change pas lorsque l'on soustrait à chaque colonnes la première colonne.

Définition: Si R et R' sont deux repères cartésiens , la matrice $M_R(R')$ est appelée matrice de changement du repère R en le repère R'.

Compte tenu des résultats précédents, $M_R(R')$ est inversible et de matrice inverse $M_{R'}(R)$.

D'autre part si m est un point de E et $M_R(m)$ la matrice le représentant, on a la formule de changement de repères :

$$M_{R'}(m) = M_{R'}(R)\, M_R(m)$$

Ainsi que des formules analogues pour les familles de points.

C) Relations entre repères affines et cartésiens.

Si $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension n et si $R = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est un repère affine de E, on pose $O = a_0$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{a_0a_1}$, ..., $\vec{e}_n = \overrightarrow{a_0a_n}$ alors, $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\dots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de E, les matrices ci-dessous :

$$M_R(R) = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} O & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots\dots & \vec{e}_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ \\ 1 \\ \\ \mathbf{0} \\ \end{array} & \begin{array}{c} -1 \ \dots\dots \\ \mathbf{0} \\ \ddots \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \boxed{1} \end{array} \end{array}\right] \end{array}$$

matrice représentant O dans R

$$M_R(R\ ) = \begin{array}{c} \\ O \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \\ \\ \mathbf{0} \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ \dots\dots \\ \mathbf{0} \\ \ddots \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \boxed{1} \end{array} \end{array}\right] \end{array}$$

matrice représentant a_0 dans R

Sont les matrices de changement de repères , du repère affine en le repère cartésien et du repère cartésien en le repère affine.

Elles sont inverses l'une de l'autre et si m est un point de E et $M_R(m)$ la matrice le représentant, dans le repère affine, on a la relation :

$$M_{R'}(m) = M_{R'}(R) M_R(m)$$

et de la même façon,

$$M_{R'}(m) = M_{R'}(R) M_R(m)$$

Ainsi que des formules analogues pour les familles de points.

4) Invariants affines

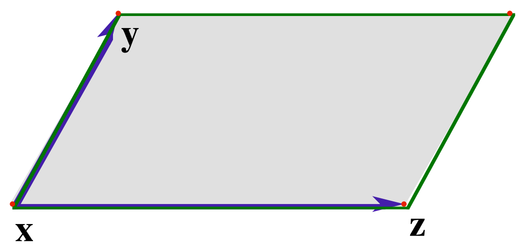
Les invariants affines sont des nombres invariants par changement de repères. On peut distinguer plusieurs cas suivant la dimension de l'espace.

A) La mesure algébrique.

Si $(X, \vec{X})$ est une droite affine, un espace affine de dimension 1, et si $\vec{e}$ est une base de $\vec{X}$, alors si x et y sont deux points distincts de X, le vecteur $\vec{xy}$ est colinéaire à $\vec{e}$.
La mesure algébrique du vecteur $\vec{xy}$ est le scalaire noté $\overline{xy}$ tel que $\vec{xy} = \overline{xy}\ \vec{e}$.
Si x' et y' sont deux autres points distincts de X, alors le rapport $\dfrac{\overline{xy}}{\overline{x'y'}}$ est indépendant de la base choisie de $\vec{X}$, c'est un invariant affine.

B) L'aire algébrique

Si $(X, \vec{X})$ est un plan affine, un espace affine de dimension 2, et si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère cartésien de X, alors si x, y et z sont trois points non alignés de X, on appelle **aire algébrique** des points x, y et z le déterminant de la matrice $M_R(x, y, z)$. L'aire algébrique dépend du repère R.



On notera que ce déterminant est aussi le déterminant de la matrice représentant les vecteurs $\vec{xy}$ et $\vec{xz}$ sur la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

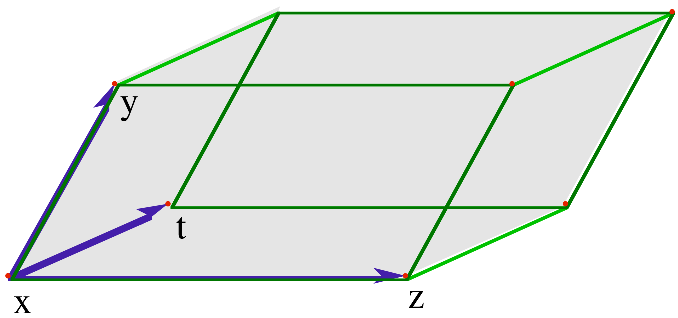
Si x', y' et z' sont trois autres points non alignés de X, alors le rapport des aires algébriques, $\det M_R(x, y, z) / \det M_R(x', y', z')$ est un invariant affine (il suffit de faire le changement de repères, $M_{R'}(x, y, z) = M_{R'}(R)\ M_R(x, y, z)$.

C) Le volume algébrique.

Si $(X, \vec{X})$ est l'espace affine, un espace affine de dimension trois , et si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère cartésien de X , alors si x, y , z et t sont quatre points non coplanaires de X, on appelle **volume algébrique** des points x, y, z et t le déterminant de la matrice $M_R(x, y, z, t)$.

Le volume algébrique dépend du repère R.

On notera que ce déterminant est aussi le déterminant de la matrice représentant les vecteurs $\vec{xy}, \vec{xz}$ et $\vec{xt}$ sur la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



Si x', y ', z' et t' sont quatre autres points non coplanaires de X, alors le rapport des volumes algébriques, $\det M_R(x, y, z, t) / \det M_R(x', y', z', t')$ est un invariant affine (il suffit de faire un changement de repères, $M_{R'}(x, y, z, t) = M_{R'}(R)\, M_R(x, y, z, t)$.

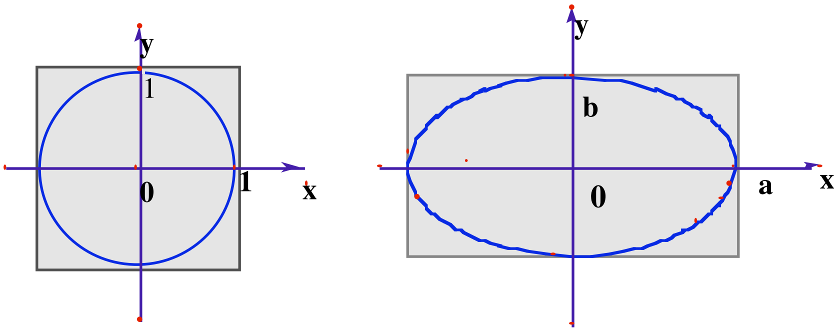
On notera que l'on pourrait aisément généraliser ces résultats en dimension n en considérant un hypervolume.

Exemple: Dans le plan affine, on considère deux repères cartésiens, $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $R' = (O, a\vec{i}, b\vec{j})$, a et b sont deux réels strictement positifs.

On considère une ellipse d'équation $x^2/a^2+y^2/b^2 =1$, dans le repère R. L'équation de cette ellipse dans le repère R' est $x^2 +y^2 =1$, équation d'un cercle.

Le rapport des aires est un invariant affine, il ne dépend pas des repères. Par conséquent le rapport de l'aire du carré sur l'aire du cercle (inscrit dans le carré) est égal au rapport de l'aire du rectangle sur l'aire de l'ellipse (inscrite dans le rectangle).

Si on note S l'aire de l'ellipse, on obtient la relation $4/\pi = 4ab / S$ et par conséquent l'aire de l'ellipse est $S = \pi\, ab$ (on peut noter que l'aire d'un ellipsoïde s'obtient de la même façon).



5) Représentation analytique des VLA.

Un repère étant choisi, affine ou cartésien, on veut représenter une VLA par l'ensemble des coordonnées de ses points. dans le repère. Pour représenter un point courant de la VLA , on peut :

- décrire l'ensemble des points à l'aide d'un paramètre variable , c'est la représentation paramétrique.
- représenter les points par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une ou plusieurs équations, c'est la représentation cartésienne.

On considère une VLA V de dimension p dans un espace affine E de dimension n.

A) Représentation paramétrique de V.

1) Sur un repère affine R = ($a_0, a_1, \ldots, a_n$).

Si R'= ($b_0, b_1, \ldots, b_p$) est un repère affine de V, un point courant m de V est représenté par une matrice de la forme $M_{R'}(m) = {}^t[\alpha_0 \quad \alpha_1 \ldots \quad \alpha_p]$, c'est la matrice unicolonne représentant m dans le repère, les α_ι étant les coordonnées barycentriques (de somme 1) de m.

Ainsi sur le repère R, les coordonnées barycentriques du point m sont obtenues par le produit des matrices :

$$M_R(R')M_{R'}(m)$$

Ceci est une représentation paramétrique de la VLA, les paramètres sont α_0 , $\alpha_1, \ldots , \alpha_p$.

2) Sur un repère cartésien R =(O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{e}_n$)

Si R'= (A, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_p$) est un repère cartésien de V, un point courant m de V est représenté par une matrice de la forme $M_{R'}(m) = {}^t[\ 1 \quad \alpha_1 \ldots \quad \alpha_p]$, c'est la matrice

unicolonne représentant m dans le repère, les α_i étant les coordonnées du vecteur $\vec{Am}$ sur la base e.
Ainsi sur le repère R, les coordonnées cartésiennes du point m sont obtenues par le produit des matrices :

$$M_R(R')M_{R'}(m)$$

Ceci est une représentation paramétrique de la VLA, les paramètres sont $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$.
.

Exemple :

Soient E_2 le plan affine et A, B et C trois points non alignés du plan(ils constituent un repère affine). On considère deux points distincts du plan X et Y, donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par ces points.

Si x_1, x_2, x_3 (resp. y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées barycentriques (de somme 1) de X (resp.Y) et si M est un point courant du plan de coordonnées barycentriques m_1, m_2 , m_3 alors, M est sur la droite (D) si et seulement si il existe α et β tels que :

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ on écrit aussi, } \begin{cases} m_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 \\ m_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 \\ m_3 = \alpha x_3 + \beta y_3 \end{cases}$$

Ceci est une représentation paramétrique de la droite (D) dans le repère affine.

D'autre part, (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) est un repère cartésien du plan et on peut donner une représentation paramétrique dans ce repère.
Ainsi, (X, $\vec{XY}$) est un repère cartésien de la droite (D) et par conséquent, si x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) sont les coordonnées cartésiennes de X (resp. Y) et si M est un point courant du plan de coordonnées cartésiennes m_1 ,m_2 alors, M est sur la droite (D) si et seulement si il existe α tel que :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & y_1 - x_1 \\ x_2 & y_2 - x_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ on écrit aussi, } \begin{cases} m_1 = x_1 + \alpha(y_1 - x_1) \\ m_2 = x_2 + \alpha(y_2 - x_2) \end{cases}$$

Ceci est une représentation paramétrique de la droite (D) dans le repère cartésien.

B) Représentation cartésienne de V sur un repère cartésien.

Soients $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension n, R = $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E et V est une VLA de E de dimension p.

1) On suppose dans un premier temps que p =n-1, V est un hyperplan affine de E et a un point de V.

Alors, $\vec{V}$ est un hyperplan vectoriel de $\vec{E}$ et par conséquent le noyau d'une forme linéaire $\vec{f}$ non identiquement nulle de $\vec{E}$.
La matrice représentant $\vec{f}$ sur la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n$ est la matrice uniligne M($\vec{f}$) = [$\vec{f}$($\vec{e}_1$),..., $\vec{f}$($\vec{e}_n$)].
Ainsi, m est un point de V si et seulement si le vecteur $\vec{am}$ est dans le noyau de $\vec{f}$; relation que l'on peut exprimer matriciellement de la façon suivante :

Si $M_R(m) = {}^t[1\ m_1\ \ldots.m_n]$ et $M_R(a) = {}^t[1\ a_1\ \ldots.a_n]$ sont les matrices représentant les points m et a dans le repère R, la matrice $Y = {}^t[a_1\text{-}m_1,\ldots\ldots, a_n\text{-}m_n]$ représente le vecteur $\vec{ma}$ sur la base ($\vec{e}_1,\ldots, \vec{e}_n$) et l'on a la relation :

m est un point de V si et seulement si M($\vec{f}$)Y = 0.

soit ,

$$\boxed{\text{m est dans V si et seulement si} \sum_{i=1}^{i=n} \vec{f}(\vec{e}_i)(a_i - m_i) = 0}$$

ceci est une équation cartésienne de l'hyperplan V.

On notera que la forme linéaire représentant l'hyperplan vectoriel est unique à un coefficient multiplicatif près et par conséquent, l'équation cartésienne de l'hyperplan affine aussi.

2) On se place dans le cas général, V est une VLA de E de dimension p et a un point de V. Alors, $\vec{V}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E}$ et par conséquent est l'intersection de n-p hyperplans vectoriels.

Ainsi, $\vec{V}$ est l'intersection des noyaux de n-p formes linéaires $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots; \vec{f}_{n-p}$ non identiquement nulles et linéairement indépendantes .

L'équation de V est obtenue à partir des équations des n-p hyperplans vectoriels, soit :
Si $M_R(m) = {}^t[1\ m_1\ \ldots.m_n]$ et $M_R(a) = {}^t[1\ a_1\ \ldots.a_n]$ sont les matrices représentant les points m et a dans le repère R, la matrice $Y = {}^t[a_1\text{-}m_1,\ldots\ldots, a_n\text{-}m_n]$ représente le vecteur $\vec{ma}$ sur la base ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n$) et l'on a :

m est un point de V si et seulement si pour tout j dans {1, 2,..., n-p} M($\vec{f}_j$)Y = 0 soit

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{f}_j(\vec{e}_i)(a_i - m_i) = 0}$$

Une équation de V est donc la donnée des n-p équations des hyperplans affines définissant V.

Exemples :

1) Soit E_2 le plan affine, muni d'un repère cartésien R= (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) et x et y deux points distincts du plan. Donner une équation cartésienne de la droite passant par ces points ?

Si x_1, x_2 sont les coordonnées de x dans le repère R et y_1, y_2 sont les coordonnées de y; un point m de coordonnées m_1 , m_2 est sur la droite si et seulement si les trois points sont alignés soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & m_1 \\ x_2 & y_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ soit la relation } (x_1-m_1)(y_2-x_2)= (x_2-m_2)(y_1-x_1).$$

2) Soit E_3 l'espace affine, muni d'un repère cartésien R = (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$)}et x et y deux points distincts du plan.
Donner une équation cartésienne de la droite passant par ces points ?
Il faut représenter la droite comme intersection de deux plans. Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans le repère R et si y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de y, on note m un point de la droite de coordonnées m_1 , m_2 , m_3 .
On choisit un point z de coordonnées z_1, z_2, z_3 n'appartenant pas à la droite et on écrit une équation du plan passant par x, y, z et m soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & m_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & m_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ensuite, on choisit un point z' n'appartenant pas au plan précédent et on écrit l'équation du plan passant par x, y, z' et m soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z'_1 & m_1 \\ x_2 & y_2 & z'_2 & m_2 \\ x_3 & y_3 & z'_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ avec la condition } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & z'_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & z'_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & z'_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Exercices du chapitre II

Exercice 1

Soit X un espace affine et Y une partie non vide de X. Montrer que Y est une VLA si et seulement si toute droite affine joignant deux points distincts de Y est incluse dans Y.

Exercice 2

Dans l'espace affine de dimension trois, on considère quatre points non coplanaires A, B, C et D. On note M_1 le milieu de AB, M_2 le milieu de BC, M_3 le milieu de CD et M_4 le milieu de DA.
Montrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont dans un même plan.
Que peut-on dire des milieux de AC et de BD?

Exercice 3

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On définit les points E, F, G par :

$$\text{E est le milieu de AB, } \vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BC} \text{ et } G = \text{bary } \{(C,1), (D,3)\}.$$

1) Donner des coordonnées barycentriques des points E, F, G dans le repère A, B, C, D.

2) Soient H, M, N trois points de l'espace affine.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C, D ;

i) Pour qu'un point M appartienne à la droite (EG).
ii) Pour qu'un point N appartienne à la droite (HF), H étant un point de la droite (AD).

3)Montrer qu'il existe un unique point H de (AD) tel que les droites (EG) et (HF) soient concourantes.

Exercice 4

Dans le plan affine, on considère trois points non alignés, A, B, C constituant un repère affine. On choisit trois points A', B', C' appartenant respectivement aux droites (BC), (AC), et (AB), les points A, B, C étant exclus. On suppose donc que la matrice représentant les points A', B', C' dans le repère est :

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\beta & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \notin \{0, 1\}$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les droites (AA') et (BB') se coupent en un point unique M.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que les droites (AA') , (BB') et (CC') se coupent en un point unique M.

3) On suppose que la condition 2) est réalisée. Exprimer $\dfrac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}}$ en fonction de α, β, γ et en déduire le théorème de GERGONNE :

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1$$

Exercice 5

On se place dans un espace affine de dimension 3 rapporté au repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit le plan P défini par $(A, \vec{u}, \vec{u}\,')$ où A a pour coordonnées $(2, -1, 0)$ dans R, $\vec{u}$ (resp. $\vec{u}\,'$) a pour coordonnées $(-1, 3, 4)$ (resp. $(2, -1, 3)$) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit D une droite incluse dans P dont une équation cartésienne dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{u}\,')$ de P est $2X - 3Y + 6 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de D dans R, un repère cartésien $(B, \vec{v})$ de D dans R, et un système de deux équations cartésiennes de D dans R.

2)Déterminer des représentations paramétriques des VLA engendrées par les points de coordonnées dans R :

a) $(1, 2, 3)$, $(-1, 3, 1)$, $(7, -1, 9)$;
b) $(1, 2, 3)$, $(-1, 3, 1)$, $(3, 1, 5)$;
c) $(1, 2, 3)$, $(-1, 3, 1)$, $(3, 1, 5)$, $(0, 5, 6)$;
d) $(1, 2, 3)$, $(-1, 3, 1)$, $(3, 1, 5)$, $(5, 0, 6)$.

On précisera leur dimension et on en donnera des équations cartésiennes.

3) Soit la droite D définie par deux équations cartésiennes dans R :

$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

a)Donner une représentation paramétrique de D dans R , et un repère cartésien $(A, \vec{u})$ de D .

b) Soit D' la droite définie par $(A', \vec{u}\,')$ avec $A'(-1, -2, 0)$ dans R et le vecteur $\vec{u}\,' = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.
Déterminer si D et D' sont ou non, parallèles, coplanaires et préciser l'intersection $D \,^{\circ}\, D'$.

c)Soit Q un plan admettent pour représentation paramétrique dans R /

$$\begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -4 + \lambda - \beta \\ z = 1 - 2\lambda + 4\beta \end{cases} \quad ; \lambda \text{ et } ß \text{ sont des paramètres réels.}$$

.

Donner une équation cartésienne de Q . Déterminer si D est parallèle à Q ou non et préciser l'intersection D º Q .

Exercice 6

L'espace E est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points I, J, K définis par $\vec{OI} = \vec{i}, \vec{OJ} = \vec{j}, \vec{OK} = \vec{k}$.

On désigne par (D) la droite passant par O et K, et par (P) le plan passant par O, I et J et on considère les droites (D') et (D") définies par leur équations paramétriques:

$$(D') \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 - 4t \\ z = t \end{cases} \qquad (D'') \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = 4 + u \\ z = u \end{cases}$$

1) Soit M le point de la droite (D) défini par $\vec{OM} = \lambda\vec{k}$ Le plan contenant M et parallèle à (P) coupe la droite (D') en M' et la droite (D") en M". Calculer en fonction de l, les coordonnées des points M, M' et M".

2)Déterminer l pour que les trois points M, M' et M" soient alignés.

3) En déduire qu'il existe deux droites (D) et (D') parallèles au plan (P) et rencontrant les droites (D), (D') et (D"). Ecrire un système d'équations paramétriques des droites (D) et (D') .

Exercice 7

Soient D et P une droite et un plan sécants inclus dans l'espace affine E de dimension 3. A tout point M de l'espace, on associe la droite (resp. le plan) passant par M et parallèle à D (resp. à P) et on note M' (resp.M") l'intersection de cette droite (resp. plan) avec le plan P (resp. droite D).

1) Soit A un point de l'espace.

a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A soit le milieu de M' et M".

b)Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A soit l'isobarycentre des points M, M' et M".

c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A, M et M' soient alignés.

2) Soit Q un plan de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite contenant M' et M'' soit parallèle à Q.

3) Soit D une droite de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite contenant M' et M'' soit parallèle à D.

Exercice 8

Soient (E, $\vec{E}$) un plan affine, I un point du plan et R = (O, $\vec{i}, \vec{j}$) un repère cartésien de E . On appelle faisceau de droites de sommet I l'ensemble des droites affines passant par le point I .

1) Soient deux droites distinctes D et D' d'équations respectivement, $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w'= 0$. On suppose que D et D' sont concourantes en I et que la droite D" a pour équation $u"x + v"y + w" = 0$.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) La droite D" appartient au faisceau de sommet I.

ii)

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u" & v" & w" \end{vmatrix} = 0.$$

iii) Il existe λ et ß réels tels que $u" = \lambda u + ßu'$, $v" = \lambda v + ßv'$, $w" = \lambda w + ßw'$.

2) A tout réel m on associe la droite D_m d'équation :

$$(m + 2)\, x + (2m - 1)\, y - m + 3 = 0 .$$

a)Montrer que toutes ces droites passent par un point fixe I dont on précisera les coordonnées dans R .

b) L'ensemble des droites D_m lorsque m décrit r est-il égal au faisceau de sommet I ?

c)Montrer que pour tout $M_0(x_0, y_0)$ de E \ {I}, il existe une et une seule droite du faisceau qui passe par M_0 .

Exercice 9

Soit (E, $\vec{E}$) un espace affine de dimension deux muni d'un repère cartésien R = (O, $\vec{i}, \vec{j}$).
On considère quatre droites d, d', δ, δ' d'équations respectives :

$$(d) \quad ax + by + c = 0 \qquad (\delta) \quad ux + vy + w = 0$$
$$(d') \quad a'x + b'y + c' = 0 \qquad (\delta') \quad u'x + v'y + w' = 0 .$$

On suppose que d et d’ sont sécantes en un point I et que δ et δ' sont sécantes en un point J . On suppose que $I \neq J$, donner une équation de la droite (IJ).

Exercice 10

L’ espace E = €^{4} est considéré comme espace vectoriel et comme espace affine sur lui même. La base canonique de E devient donc un repère cartésien R lorsque on lui adjoint le point O= (0,0,0,0).

Soient A = { (x,y,z,t) é E / z = xy + 1 et t = x -y +1} et la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que A est inversible et en déduire une base de l’espace vectoriel engendré par A que l’ on notera Vect (A).
2) On note Aff(A) la VLA engendrée par A . Quelle est la dimension de Aff(A) ?
Montrer que les vecteurs colonnes de la matrice A permettent de construire un repère affine R de Aff(A). Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de Aff(A) dans le repère R.

3) On considère les points de E, b_0 = (0,0,0,1) , b_1 = (1,0,0,2) , b_2 = (0,1,0,0) , b_3 = (0,0,1,1) . Montrer que ces points constituent un repère affine de Aff(A). On notera $R'=(b_0, \overrightarrow{b_0b_1}, \overrightarrow{b_0b_2}, \overrightarrow{b_0b_3})$ le repère cartésien associé.
Représenter l’ensemble A dans le repère R’.

4) Si k est un réel donné, on note H_k l’hyperplan affine de E d’équation z = k. Donner l’équation cartésienne de Aff(A) $\cap H_k$ dans le repère R’. que peut on en conclure ?

Solutions des exercices du chapitre II

Exercice 1

Si Y est une VLA et si D est une droite joignant deux points x et y de Y alors les points de D sont des barycentres des points x et y et par conséquent appartiennent à Y.

Si Y est une partie non vide contenant toutes les droites joignant deux points de Y, alors si x et y sont deux points de Y et si α est un scalaire, z = bary{(x, α), (y, 1-α)}est sur la droite joignant x et y et z est dans Y.

Exercice 2

Les quatre points A, B, C, D constituent un repère affine de l'espace. La matrice représentant les points M_1, M_2, M_3, M_4 dans cet ordre est :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant est nul et son rang est trois donc les quatre points sont dans un même plan P. Les points M_1, M_2, M_3 constituent un repère affine du plan P.
On note M_5 le milieu de AC et M_6 le milieu de BD, et on considère les matrices re présentant M_1, M_2, M_3, M_5 et M_1, M_2, M_3, M_6 dans le repère. On obtient :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elles sont de déterminant non nul et par conséquent les milieux de AC et de BD ne sont pas dans le plan P.

Exercice 3

1) Les quatre points A, B, C, D constituent un repère affine R de l'espace. La matrice représentant les points E, F, G dans ce repère donne les coordonnées barycentriques des points soit :

$$M_R(E, F, G) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

2) i) M de coordonnées barycentriques (a, b, c, d) appartient à la droite (EG) si et seulement si le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a & 1/2 & 0 \\ b & 1/2 & 0 \\ c & 0 & 1/4 \\ d & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$ est 2 .

On obtient, a =b et 3c = d donc c = (1-2a)/4 et d = 3(1-2a)/4.

ii) H est sur la droite (AD) ses coordonnées barycentriques sont (x, 0, 0, 1-x).

Le point N de coordonnées barycentriques (a’, b’, c’, d’) appartient à la droite (HF) si et seulement si il existe x tel que :

le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a' & 0 & x \\ b' & 1/3 & 0 \\ c' & 2/3 & 0 \\ d' & 0 & 1-x \end{bmatrix}$ est 2 .

La condition est 2b’ = c’.

3) Les droites se coupent en un point de coordonnées barycentriques vérifiant les deux conditions i) et ii) soit 2a=(1-2a)/4 par conséquent, a=1/10 et x=1/7.

Exercice 4

1) Un point de la droite (AA’) est barycentre des points A et A’, il admet pour coordonnées barycentriques dans le repère affine (a, (1-a)(1-α), (1-a)α).
Les droites se coupent si et seulement si il existe un point m de (AA’) tel que les points m, B et B’ soient alignés.

Ainsi si il existe a tel que rang de $\begin{bmatrix} a & 0 & \beta \\ (1-a)(1-\alpha) & 1 & 0 \\ (1-a)\alpha & 0 & 1-\beta \end{bmatrix} = 2.$

Comme les deux dernières colonnes sont indépendantes, il faut et il suffit que 1-β+ $\alpha\beta$ $\neq 0$ et dans ce cas a = $\alpha\beta$/(1-β+$\alpha\beta$). Le point M a pour coordonnées ($\alpha\beta$, (1-α)(1-β), (1-β)α) / (1-β+$\alpha\beta$).

2) On écrit la matrice représentant le point M et les points C et C’. Son déterminant est [$\alpha\beta\gamma$-(1-α)(1-β)(1-γ)] / (1-β+$\alpha\beta$).
Ainsi, la condition est $\alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ et $1-\beta+\alpha\beta \neq 0$.

3) A partir des coordonnées de M on obtient :

$$(1-\alpha+\alpha\beta)\overrightarrow{A'M} = \alpha\beta\ \overrightarrow{A'A} + \underline{(1-\alpha)(1-\beta)\overrightarrow{A'B} + \alpha(1-\beta)\ \overrightarrow{A'C}} = \alpha\beta\overrightarrow{A'A} \text{ et ainsi,}$$

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha+\alpha\beta)}.$$

On obtient de la même façon :

$$\frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha+\alpha\beta)} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = \frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha+\alpha\beta)}$$

et le résultat.

Exercice 5

1) Dans P, un point M de D de coordonnées (X, Y) vérifie les relations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = X\vec{u} + Y\vec{u}' \\ 2X - 3Y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Dans l'espace le point M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère R. Ainsi on a les relations :

$$\begin{cases} x - 2 = -X + 2Y = -X + \frac{4}{3}X + 4 = \frac{1}{3}X + 4 \\ y + 1 = 3X - Y = 3X - \frac{2}{3}X - 2 = \frac{7}{3}X - 2 \\ z = 4X + 3Y = 4X + 2X + 6 = 6X + 6 \end{cases}.$$

La droite D passe par le point de coordonnées (4,-2,6) et admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées (1,7,18).
Une représentation paramétrique de D dans le repère R est :

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -2 + 7\lambda \\ z = 6 + 18\lambda \end{cases}.$$

Le point B de coordonnées (4,-2,6) et le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (1, 7, 18), constituent un repère cartésien de D.
On obtient un système de deux équations cartésiennes de D en éliminant le paramètre dans l'équation paramétrique soit par exemple :
7(x-4)=y+2 et 18(x-4)=z-6 et les équations sont 7x-y-30 = 0 et 18x-z-66 = 0.

2) a) On considère la matrice représentant les points dans le repère :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

son rang est 2 et par conséquent la VLA engendrée par ces points est une droite affine.
Cette droite passant par le point de coordonnées (1,2,3) a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées (-2, 1, -2).
Une équation paramétrique est : x=1-2λ, y=2+λ, z=3-2λ.
Une équation cartésienne est : 2(y-2)=1-x et 2(y-2)=3-z.

b) Il s'agit de la même droite affine qu'au point a).

c) On considère la matrice représentant les points dans le repère :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

son rang est 3 et par conséquent la VLA engendrée par ces points est un plan affine. Ce plan passant par le point de coordonnées (1,2,3) a pour vecteur directeur les vecteurs de coordonnées (-2, 1, -2) et (-1, 3, 3).

Une équation cartésienne est $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 = 9x + 8y - 5z - 10$.

d) On obtient un plan passant par le point de coordonnées (1,2,3) et ayant pour vecteur directeur les vecteurs de coordonnées (-2, 1, -2) et (4, - 2, 3), une équation cartésienne est x+2y-5 = 0.

3) a) On exprime x et y en fonction de z, on obtient x= 1/11(2z-12) et y=1/11(7z-20).

La droite D passe par le point A de coordonnées (-12/11, -20/11, 0) et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées 11(2/11, 7/11,1)=(2, 7, 11).

b) $\vec{u}$ et $\vec{u}$ ' ne sont pas colinéaires, on a l'alternative soit D et D' sont dans un même plan et elles se coupent en un point, soit elles ne sont pas dans un même plan et elles ne se coupent pas.

On cherche donc un point appartenant aux deux droites. S'il existe, ses coordonnées vérifient les relations des deux équations paramétriques soit :

Il existe a et b tels que x=-12/11+2a =-1+3b ; y =-20/11+7a = -2-5b ; z =11a = b.

On trouve a=-1/(11×31) soit un point I (-34/31, -57/31, -1/31).

D et D' sont dans un même plan et se coupent en I.

c) On élimine les paramètres, on obtient z+4y = 1-2λ-16+4λ=-15+2(x-2)/-4 soit : x+8y+2z+28 =0

D est parallèle à Q si et seulement si $\vec{u}$ est dans le plan vectoriel $\vec{Q}$ d' équation x+8y+2z = 0. Comme 2+56+22≠0, D n'est pas parallèle à Q et D et Q se coupent en un point J.

Les coordonnées du point J sont données par les solutions du système :

$$\begin{cases} x + 8y + 2z = -28 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

On trouve J(-7/5, -29/10, -17/10).

Exercice 6

1) Les coordonnées de M dans le repère R sont (0, 0, λ). L'équation du plan contenant M et parallèle à (P) est z=λ et par conséquent M' est de coordonnées (3+λ,9-4λ, λ) et M'' est de coordonnées (2+2λ, 4+λ, λ).

2) On écrit la matrice représentant les points M, M', M" dans le repère R.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3+\lambda & 2+2\lambda \\ 0 & 9-4\lambda & 4+\lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice est deux lorsque λ=1 ou λ=-2/3. Dans les autres cas le rang est 3. Ainsi, les trois points sont alignés si et seulement si λ=1 ou λ=-2/3.

3) Si Δ est une droite parallèle au plan P et coupant les droites D, D' et D" en M, M' et M", alors ces points vérifient les conditions précédentes. Les droites sont dans des plans distincts et par conséquent, elles sont différentes. On a donc trouvé deux droites vérifiant les conditions.

* pour $\lambda=1$, on obtient la droite passant par le point de coordonnées (0, 0, 1) et de vecteur directeur de coordonnées (4, 5, 0) et d'équation paramétrique : $x = 4\alpha$, $y = 5\alpha$, $z=1$.

* pour $\lambda=-2/3$, on obtient la droite passant par le point de coordonnées (0, 0, -2/3) et de vecteur directeur de coordonnées (7/3, 35/3, 0) et d'équation paramétrique : $x = 7\alpha/3$, $y = 35\alpha/3$, $z=-2/3$.

Exercice 7

On considère le repère cartésien $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où O désigne le point d'intersection de P et de D, $\vec{i},\vec{j}$ des vecteurs directeurs du plan et $\vec{k}$ un vecteur directeur de la droite D.

Si M est un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère, M' est de coordonnées (x, y, 0) et M" est de coordonnées (0, 0, z).

1) a) soit A(a, b, c) un point de l'espace, A est le milieu de M' et M" si et seulement si $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$. On obtient un unique point M, situé sur la droite (OA) et tel que A est le milieu de OM.

b) Si A est l'isobarycentre des points M, M', M", alors $2x-3a = 0$, $2y-3b = 0$, $2z-3c = 0$. On obtient un unique point M, situé sur la droite (OA) et tel que M = bary{(O, 1/3), (A, 2/3)}.

c) A, M, M' sont alignés si et seulement si le rang de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & x \\ b & y & y \\ c & z & 0 \end{bmatrix}$ est $\neq 3$.

Soit $z=0$ ou ($x = a$ et $y = b$). On obtient le plan P et la droite parallèle à D passant par A.

2)Soit $Ax+By+Cz = 0$ l'équation du plan vectoriel direction de Q. La droite contenant M'M" est parallèle à Q si et seulement si $-Ax-By+Cz = 0$.

$-Ax-By+Cz = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel donc d'un plan passant par O.
En fait ce plan est le symétrique du plan parallèle à Q passant par O, par rapport à P dans la direction de la droite D.

3)Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite Δ de coordonnées (a, b, c) dans le repère R. La droite M'M" est parallèle à Δ si et seulement si il existe un scalaire k tel que $x = -ka$; $y = -kb$; $z = kc$ soit $x =k(-a)$, $y =k(-b)$ et $z = kc$.

On obtient l'équation d'une droite passant par O et de vecteur directeur de coordonnées (-a, -b, c). En fait cette droite est la symétrique de la droite parallèle à Δ passant par O, par rapport à P dans la direction de la droite D.

Exercice 8

Les droites D et D' étant distinctes, les vecteurs (u, v, w) et (u', v', w') ne sont pas colinéaires. On note (a, b) les cordonnées du point I dans le repère R, et par conséquent on a ua+vb+w = 0 et u'a+v'b+w' = 0

1) i) $\Rightarrow$ii) Si D" appartient au faisceau alors u"a+v"b+w" = 0, ainsi les trois colonnes de la matrice sont colinéaires et le déterminant est nul.

ii) $\Rightarrow$iii) Si le déterminant est nul, la troisième ligne de la matrice est liée aux deux premières. Ainsi il existe λ, ß réels tels que :

u" = λu + ßu' , v" = λv + ßv' , w" = λw + ßw'

iii) $\Rightarrow$i) On a u"a+v"b+w"= λ(ua+vb+w)+ ß(u'a+v'b+w') = 0 et D" passe par I.

2) a) (m + 2) x + (2m – 1) y – m + 3 = m(x+2y-1)+2x-y+3 = 0 .

Le système x+2y = 1 et 2x-y =-3 a une solution unique x=-1 et y=1. Ainsi toutes les droites passent par le point I(-1, 1).

b)La droite d'équation x+2y-1= 0 appartient au faisceau mais n'est pas dans l'ensemble des droites $\{D_m$./ m réel$\}$. En fait cet ensemble est l'ensemble des droites du faisceau à l'exception de cette droite.

c) Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point de E différent de I, alors la droite passant par M_0 et I est dans le faisceau et est unique.

Exercice 9

* Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$ la droite δ est dans le faisceau passant par I donc δ est la droite (IJ).

* Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u & v & w \end{vmatrix} \neq 0$ les droites du faisceau passant par J ont pour équation u'x+v'y+w'+α(ux+vy+w)=0. La droite (IJ) est obtenue avec la valeur de α vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 .$$

Ainsi la droite (IJ) a pour équation :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u & v & w \end{vmatrix} (u' x + v' y + w') - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} (ux + vy + w) = 0 .$$

Exercice 10

1) Le déterminant de A est $2\sqrt{2}-3$ et les vecteurs colonnes de la matrice sont indépendants. D'autre part, on vérifie que les vecteurs colonnes de la matrice sont dans A et par conséquent Vect(A) est au moins de dimension 4 donc égal à E.

2) A est contenu dans l'hyperplan affine d'équation x-y-t+1 = 0 donc Aff(A) est au plus de dimension 3. Comme les vecteurs colonnes sont affinement indépendants, Aff(A) est de dimension 3 et égale à l'hyperplan précédent.

Ainsi les vecteurs colonnes constituent un repère affine et x-y-t+1 = 0 est une équation cartésienne de Aff(A). Une équation paramétrique est obtenue à partir du repère affine soit :

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma \\ y = 1 - \alpha + (\sqrt{2}-1)\gamma \\ z = 1 + \beta + 2\gamma \\ t = 2\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

3) On vérifie que les points sont dans l'hyperplan et que la matrice représentant les points est de déterminant non nul. Ainsi R' est un repère cartésien de l'hyperplan.

On recherche la matrice de changement de repères.

$M_R(R') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $M_R(R')\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ lorsque X, Y, Z désignent les coordonnées dans le repère R'.

On obtient donc les relations: X = x, Y = y, Z = z, 1+X-Y = t et l'équation de A dans R' est Z = XY+1, équation d'une quadrique affine.

4) Il s'agit de l'intersection de deux hyperplans non parallèles donc d'une VLA de dimension 2, d'un plan affine d'équation Z = k dans le repère R'.
L'équation de $A \cap H_k$ est donc dans R', XY = k-1 et Z = k équation d'une hyperbole.
