

Chapitre III - LES APPLICATIONS AFFINES

Les applications linéaires affines jouent le rôle des applications linéaires dans le cadre affine.

1) Définitions, propriétés.

Définition : Si $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ sont deux espaces affines, les espaces vectoriels associés étant sur le même corps K , une application de X dans Y est dite linéaire affine si et seulement si l'image des barycentres de points de X est le barycentre des images affectés des mêmes coefficients.

On notera que la propriété d'associativité des barycentres permet d'affaiblir la définition, l'image du barycentre de deux points est le barycentre des images.

A une application linéaire affine on associe une unique application linéaire appelée application linéaire associée.

Proposition : Si f est une application linéaire affine de X dans Y alors il existe une unique application linéaire $\vec{f}$ de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$ telle que si $x, y \in X$ $\vec{f}(\vec{xy}) = \vec{f(x)f(y)}$

Soit a un point fixé de X , on considère l'application $\vec{f}$ de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$, définie par, si x est dans X , $\vec{f}(\vec{ax}) = \vec{f(a)f(x)}$.

* $\vec{f}$ est linéaire. Si x et y sont dans X et α et β deux scalaires, il existe z dans X tel que $\vec{az} = \alpha\vec{ax} + \beta\vec{ay}$. On utilise la relation de Chasles et on obtient

$(1 - \alpha - \beta)\vec{az} + \alpha\vec{xz} + \beta\vec{yz} = 0$, ainsi $z = \text{bary}\{(a, 1-\alpha-\beta), (x, \alpha), (y, \beta)\}$ et $f(z) = \text{bary}\{(f(a), 1-\alpha-\beta), (f(x), \alpha), (f(y), \beta)\}$.

Par conséquent, $(1 - \alpha - \beta)f(a)\vec{f(z)} + \alpha f(x)\vec{f(z)} + \beta f(y)\vec{f(z)} = 0$ et

$\vec{f}(\vec{az}) = \alpha\vec{f}(\vec{ax}) + \beta\vec{f}(\vec{ay})$.

* $\vec{f}$ vérifie la condition. Si x et y sont dans X , $\vec{f}(\vec{xy}) = \vec{f}(\vec{ay} - \vec{ax}) = \vec{f(x)f(y)}$.

* $\vec{f}$ est unique, elle ne dépend pas du point a . En effet si f' vérifie la propriété, $f'(\vec{ax}) = \vec{f(a)f(x)} = \vec{f}(\vec{ax})$.

Ainsi, si x et y sont dans X , on a $f(x) = f(a) + \vec{f}(\vec{ax})$ et par conséquent si deux applications affines sont égales en a et ont même application linéaire associée, elles sont égales.

Conséquences : Deux applications linéaires affines sont égales si et seulement si elles coïncident en un point et ont même application linéaire associée.

Théorème : Soient $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ deux espaces affines, les espaces vectoriels associés étant sur le même corps K , et f est une application de X dans Y . Si a est un point de X , on note f_a l'application de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$ définie par :

$$\text{Si } x \text{ est dans } X, \text{ alors } f_a(\vec{ax}) = \vec{f(a)f(x)}.$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f est linéaire affine.
- ii) Il existe a dans X tel que f_a est linéaire.
- iii) Si a est dans X alors f_a est linéaire.

La démonstration de ce théorème repose sur des raisonnements du même type que ceux de la proposition précédente. Il faut noter que le point iii) permet de vérifier qu'une application est affine en montrant que l'application f_a est linéaire, ce qui est en général plus facile.

Exemples :

1) **L'application constante** est une application linéaire affine d'application linéaire associée l'application nulle.

2) **Les translations.** Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine et si $\vec{u}$ est un vecteur, on appelle translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, l'application qui à $m \in X$ associe le point $m + \vec{u}$.

On montre facilement que l'application linéaire associée à une translation est l'application identique et que réciproquement, si f affine est telle que $\vec{f}$ est l'application identique alors f est une translation.

3) **Les homothéties.** Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine, si O est un point de X et k un réel non nul, on appelle homothétie de centre O et de rapport k , notée $H(O, k)$ l'application qui à un point M de X associe le point $H(M)$ défini par la relation :

$$\vec{OH(M)} = k\vec{OM}$$

On notera que O est un point fixe et $\vec{H} = k \text{ Id}$

4) Si X est un espace vectoriel considéré comme espace affine sur lui-même, et si f est une application affine, alors si x est dans X , on a $f(x) = f(0) + \vec{f}(\vec{0x}) = f(0) + \vec{f}(x)$.

Ainsi, dans ce cas une application affine de X est la somme d'une constante et d'une application linéaire (noter que dans ce cas, si f est affine et si $f(0) = 0$ alors f est linéaire).

Propriétés des applications linéaires affines :

Ces propriétés sont directement liées aux propriétés des applications linéaires.

1) Une application linéaire affine est injective si et seulement si son application linéaire associée l'est.

2) Une application linéaire affine est surjective si et seulement si son application linéaire associée l'est.

3) Une application linéaire affine est bijective si et seulement si son application linéaire associée l'est.

Dans ce cas on dit que l'application est un **isomorphisme d'espaces affines** et l'application linéaire associée est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4) Si $f : X \rightarrow Y$ est linéaire affine, $\text{Im} f$ est une VLA de direction $\vec{\text{Im} f}$ et si V est une VLA de Y , $f^{-1}(V)$ est soit vide soit une VLA de X de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{V})$.

On notera que si b est un point de $\text{Im} f$, $f^{-1}(b)$ est une VLA de direction $\text{Ker } \vec{f}$.

5) Une application affine conserve le parallélisme. L'image de deux VLA parallèles sont parallèles, l'image de deux VLA faiblement parallèles sont faiblement parallèles.

6) **Points fixes.** Si $f : X \rightarrow X$ est linéaire affine, on appelle point fixe de X , un point O de X tel que $f(O) = O$.

Dans ce cas, pour x dans X on a, $f(x) = O + \vec{f}(\vec{Ox})$ et si on vectorialise X au point O , $\vec{f}$ est une application linéaire. Les applications affines ayant un point fixe se comportent comme des applications linéaires, ainsi l'étude des applications linéaires ayant un point fixe se ramène à l'étude des applications linéaires dans $\vec{X}$.

7) **Formes affines :** Une forme affine est une application affine de X espace affine dans le corps de référence K de $\vec{X}$ (K est considéré comme espace affine sur lui-même, donc de dimension 1).

Si f est une forme affine, alors $\vec{f}$ est une forme linéaire et si $\vec{f}$ est non identiquement nulle, son noyau est un hyperplan vectoriel de $\vec{X}$.

Par conséquent si la forme affine n'est pas constante, elle est surjective et son noyau $f^{-1}(0)$ est un hyperplan affine de X .

8) **Composition d'applications affines :** La composée de deux applications affines est une application affine :

Si $f : X \rightarrow Y$ et si $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est affine et

$$\vec{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}.$$

Si f est affine et bijective, on montre que la bijection réciproque f^{-1} est aussi affine et que $(\vec{f}^{-1}) = (\vec{f})^{-1}$.

9) Caractérisation avec un repère. Si $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est un repère affine de X et si $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ est une famille de $n+1$ points de Y , alors il existe une unique application affine f de X dans Y telle que pour $i = 0, 1, \dots, n$ on a $f(a_i) = b_i$.

De plus f est injective (resp. surjective) si et seulement si la famille $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ est une famille affinement libre (resp. génératrice).

Ainsi si $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ est un repère affine, f est un isomorphisme d'espaces affines.

2) Représentation analytique.

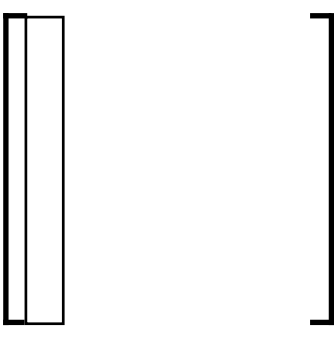
On peut représenter les applications affines sous forme de matrice dans les repères affines ou dans les repères cartésiens.

a) Repères affines.

Si $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ sont deux espaces affines, si $R = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est un repère affine de X , si $R' = (b_0, b_1, \dots, b_m)$ est un repère affine de Y et si f est une application affine de X dans Y , on appelle matrice représentant f dans les repères R et R' , la matrice ayant $n+1$ lignes et $m+1$ colonnes, notée $M_{R',R}(f)$ définie par :

Pour $i = 1, \dots, n+1$ et $j = 1, \dots, m+1$ $[M_{R',R}(f)]_{i,j}$ est la i -ème coordonnée barycentrique du point $f(a_j)$ dans le repère R' (la somme des coordonnées est 1).

$$M_{R',R}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(a_0) & f(a_1) & \dots & f(a_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right] \end{matrix}$$



 coordonnées barycentriques de $f(a_1)$ dans R'

Si m est un point de X représenté par la matrice unicolonne $M_R(m)$ dans le repère R , l'image de m par f , dans le repère R' est la matrice $M_{R',R}(f)M_R(m)$.

Si $f : X \rightarrow Y$ et si $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications affines et si R est un repère affine de X , si R' est un repère affine de Y , si R'' est un repère affine de Z , on obtient la relation :

$$M_{R'',R}(g \circ f) = M_{R'',R'}(g) M_{R',R}(f)$$

On notera que $M_{R',R}(\text{Id}) = M_{R'}(R)$.

b) Repères cartésiens

Si $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ sont deux espaces affines, si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de X , si $R' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_m)$ est un repère cartésien de Y et si f est une application affine de X dans Y , on appelle matrice représentant f dans les repères R et R' , la matrice ayant $n+1$ lignes et $m+1$ colonnes, notée $M_{R',R}(f)$ définie par :

$$M_{R',R}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} O' \\ \vec{e}'_1 \\ \vdots \\ \vec{e}'_m \end{array} \begin{array}{c} f(O) \quad \vec{f}(\vec{e}_1) \quad \dots \quad \vec{f}(\vec{e}_n) \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline M_{\vec{e}',\vec{e}}(\vec{f}) \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Matrice représentant $\vec{f}$ sur les bases $\vec{e}'$ et $\vec{e}$.

Matrice représentant $f(O)$ sur le repère R'

Si m est un point de X représenté par la matrice unicolonne $M_R(m)$ dans le repère R , l'image de m par f , dans le repère R' est la matrice $M_{R',R}(f)M_R(m)$.

Si $f : X \rightarrow Y$ et si $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications affines et si R est un repère affine de X , si R' est un repère affine de Y , si R'' est un repère affine de Z , on obtient la relation :

$$M_{R'',R}(g \circ f) = M_{R'',R'}(g) M_{R',R}(f)$$

c) Changement de repères.

Si $f : X \rightarrow X$ est une application affine et si $\text{Id} : X \rightarrow X$ est l'application identique et si R et R' sont deux repères cartésiens de X , on peut appliquer le résultat précédent. On obtient alors une formule de changement de repères cartésiens :

$$M_{R',R'}(\text{Id} \circ f \circ \text{Id}) = M_{R',R}(\text{Id}) M_{R,R}(f) M_{R,R'}(\text{Id})$$

D'autre part, si R et R' sont deux repères affines de X , on obtient une formule de changement de repères affines :

$$M_{R',R'}(Id \circ f \circ Id) = M_{R',R}(Id) M_{R,R}(f) M_{R,R'}(Id)$$

et de façon analogue, une matrice de changement de repères affines cartésiens.

$$M_{R,R}(f) = M_R(R) M_{R,R}(f) M_R(R)$$

Exemple: E_2 est le plan affine et A, B, C trois points non alignés. Ils constituent un repère affine R de E_2 . Si A' est le milieu de BC , B' le milieu de AC et C' le milieu de AB alors, on considère l'application affine f qui transforme A en A' , B en B' et C en C' et on a :

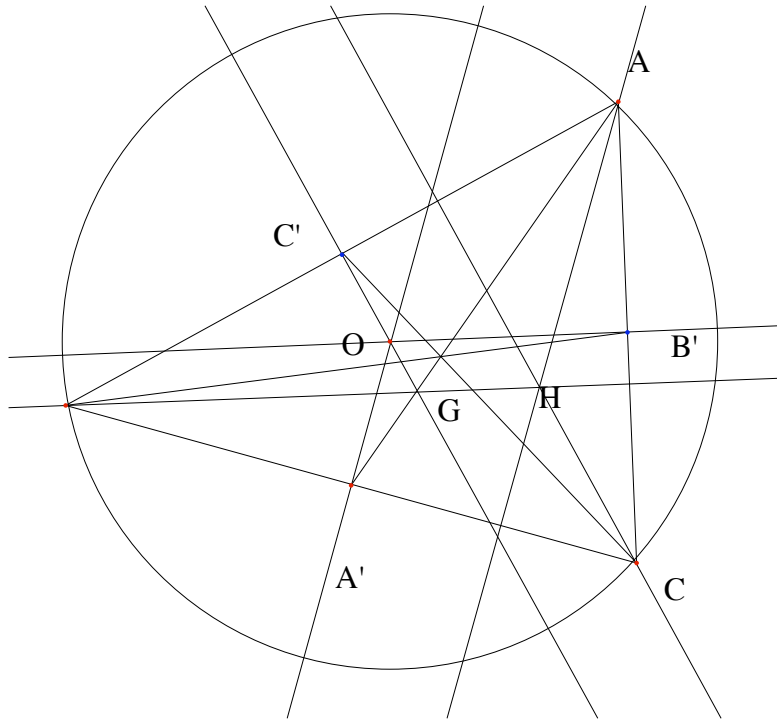
$$M_R(f) = M_R(A'B'C') = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Si R est le repère cartésien $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ alors :

$$M_R(f) = M_{R,R}(Id) M_R(f) M_{R,R}(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ce qui correspond à un changement de repère affine cartésien. Le déterminant de cette matrice étant non nul, f est une bijection affine et si G est l'isobarycentre de $A'B'C'$, alors $M_R(G) = M_R(R') M_{R',R}(G) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ et G est aussi l'isobarycentre de ABC . G est un point fixe de f . f est une homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. On notera que f transforme l'orthocentre H (intersection des hauteurs) de ABC en le centre du cercle circonscrit O (intersection des médiatrices) du triangle ABC .

Ainsi on obtient la relation d'Euler, O, H et G sont alignés et $\vec{GH} = -2 \vec{OG}$.



3) Principales applications affines

1) Les translations

Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine et $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de X , la translation de vecteur $\vec{u}$, $t_{\vec{u}}$ est représentée par la matrice ci-dessous :

Coordonnées de l'image de O

↖

↘

[

1

0

....

0

0

]

2) Les homothéties.

Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine, si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de X , si O' est un point de X et k un réel non nul, l'homothétie $H(O', k)$ est représentée par la matrice ci-dessous :

Coordonnées de ...

↖

↘

[

1

0

k

....

0

0

]

On montre que le produit de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports. (faire le produit des matrices)

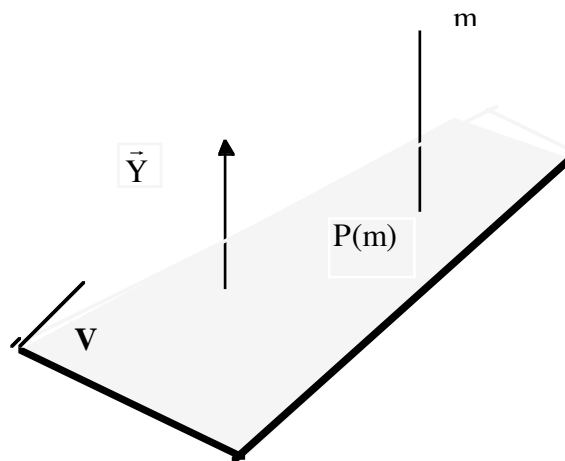
On montre de même que le produit de deux homothéties de centre différents est :

- Soit une homothétie de centre un barycentre des centres et de rapport le produit des rapports.
- Soit une translation lorsque le produit des rapports est 1.

3) Les projections.

Le cadre est le suivant : Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine, V est une VLA de X et $\vec{Y}$ un sous espace supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{X}$, on appelle projection sur V parallèlement à $\vec{Y}$, l'application qui à un point m de X associe le point $P(m)$ de V tel que $mP(m)$ est dans $\vec{Y}$.

On notera que d'après le théorème d'incidence, $P(m)$ est l'unique point de l'intersection $V \cap (m + \vec{Y})$.



Les points fixes de P sont les points de V et $\vec{P}$ est la projection sur $\vec{V}$ parallèlement à $\vec{Y}$.

$\vec{P}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 0.

On a la caractérisation suivante :

Théorème : Si P est une application de X affine dans X , , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $P \circ P = P$ et P est affine
- ii) $\vec{P}$ est linéaire , $\vec{P} \circ \vec{P} = \vec{P}$ et P a un point fixe.

iii) P est une projection sur une VLA V parallèlement à un sous espace supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{X}$.

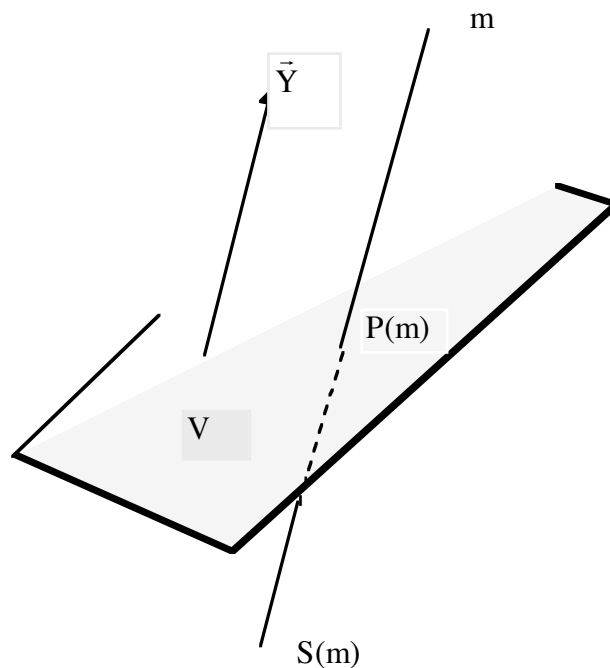
La démonstration de ce théorème est simple, noter que si x est un point alors $P(x)$ est un point fixe.

D'autre part, $\vec{P}$ étant un projecteur, $\vec{P}$ est la projection vectorielle sur son image parallèlement au noyau et par conséquent, P est une projection sur la VLA passant par $P(x)$ et de direction $\text{Im } \vec{P}$ parallèlement à $\text{Ker } \vec{P}$

4) Les symétries

Le cadre est identique au cas précédent. Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine, V est une VLA de X et $\vec{Y}$ un sous espace supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{X}$, on appelle symétrie autour de V dans la direction $\vec{Y}$ (ou parallèlement à), l'application qui à un point m de X associe le point $S(m)$ tel que le milieu de m et $S(m)$ est dans V et le vecteur $\overrightarrow{mS(m)}$ est dans $\vec{Y}$.

On notera que $P(m)$ est le milieu de m et $S(m)$.



Les points fixes de S sont les points de V et $\vec{S}$ est la symétrie vectorielle autour de $\vec{V}$ parallèlement à $\vec{Y}$.

On a la caractérisation suivante :

Théorème : Si S est une application de X dans X , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $S \circ S = \text{Id}$ et S est affine
- ii) $\vec{S}$ est linéaire, $\vec{S} \circ \vec{S} = \text{Id}$ et S a un point fixe.
- iii) S est une symétrie autour d'une VLA V parallèlement à un sous espace supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{X}$.

La démonstration de ce théorème est simple, noter que si x est un point alors le milieu m de x et $S(x)$ est un point fixe.

D'autre part, $\vec{S}$ étant une symétrie, $\vec{S}$ est la symétrie vectorielle autour de son sous espace propre associé à la valeur propre 1 et parallèlement sous espace propre associé à la valeur propre -1.

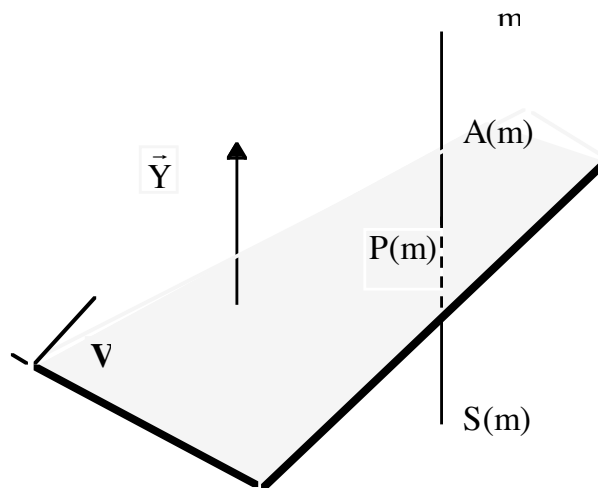
Ainsi, S est une symétrie sur la VLA passant par m et de direction $\text{Ker}(\vec{S} - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(\vec{S} + \text{Id})$.

5) Les affinités

Le cadre est identique aux cas précédents. Si $(X, \vec{X})$ est un espace affine, V est une VLA de X et $\vec{Y}$ un sous espace supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{X}$, on appelle affinité de base V dans la direction $\vec{Y}$ (ou parallèlement à) et de rapport k , l'application qui à un point m de X associe le point $A(m)$ tel que le vecteur $\overrightarrow{mA(m)}$ est dans $\vec{Y}$. et,

$$\overrightarrow{P(m)A(m)} = k \overrightarrow{P(m)m}.$$

$P(m)$ désigne est la projection de m sur V parallèlement à $\vec{Y}$.



Les points fixes de A sont les points de V et $\vec{A}$ est une affinité vectorielle de base $\vec{V}$ parallèlement à $\vec{Y}$.

On notera que si $k = 0$, A est la projection P , si $k = -1$ A est la symétrie S et si $k = 1$ A est l'application identique Id .

Si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère cartésien de X , si les l premiers vecteurs de la base e constituent une base de $\vec{V}$ et les autres une base de $\vec{Y}$, la matrice représentant l'affinité de base V dans la direction $\vec{Y}$ dans le repère est de la forme ci-dessous :

Coordonnées de
l'image de O dans R

$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & k \\ 0 & & & & & k \end{array} \right]$

4) Formes affines et hyperplans affines

Si H est un hyperplan affine de X , alors l'ensemble des formes affines de noyau H est une droite vectorielle de l'espace vectoriel des formes affines.

Autrement dit, si H est un hyperplan affine, il existe une forme affine non constante f telle que $f^{-1}(0) = H$ et les formes affines vérifiant cette propriété sont colinéaires.

Ainsi $f(m) = 0$ est l'équation de l'hyperplan affine H et toutes les équations de H sont proportionnelles.

Hyperplans parallèles.

Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans parallèles d'équation $f_1(m) = 0$ et $f_2(m) = 0$ alors on a l'alternative :

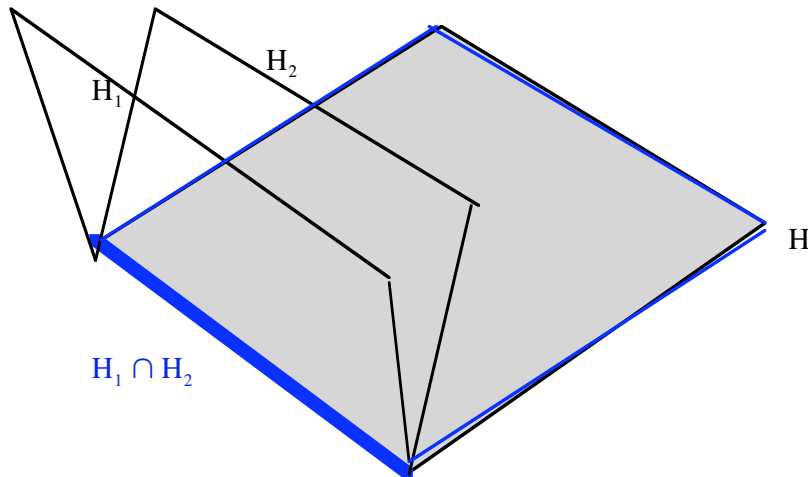
- soit $H_1 = H_2$ et il existe α non nul tel que $f_1 = \alpha f_2$
- soit $H_1 \neq H_2$ les hyperplans sont alors disjoints et il existe α non nul tel que $f_1 - \alpha f_2$ est une constante non nulle.

Faisceaux linéaires d'hyperplans affines.

Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans d'équation $f_1(m) = 0$ et $f_2(m) = 0$, on appelle faisceau linéaire d'hyperplans affines l'ensemble des hyperplans affines d'équation une combinaison linéaire des équations f_1 et f_2 .

On a l'alternative :

- H_1 et H_2 sont parallèles, le faisceau est l'ensemble des hyperplans parallèles à H_1 et H_2 .
- H_1 et H_2 ne sont pas parallèles, le faisceau est l'ensemble des hyperplans contenant la VLA $H_1 \cap H_2$.



5) Quelques résultats de géométrie, Théorèmes de Thalès, Ménélaüs, Céva.

**LE THEOREME DE THALES*

Thalès de Milet est un mathématicien grec du 6^{ème} siècle avant J.C.

Théorème: $(X, \vec{X})$ est un espace affine de dimension n , H_1, H_2 et H_3 trois hyperplans affines parallèles et distincts de direction $\vec{H}$.

On considère deux droites D et D' non parallèles aux hyperplans. La droite D (resp. D') coupe H_1 en A_1 , H_2 en A_2 et H_3 en A_3 (resp. D' coupe H_1 en A'_1 , H_2 en A'_2 et H_3 en A'_3).

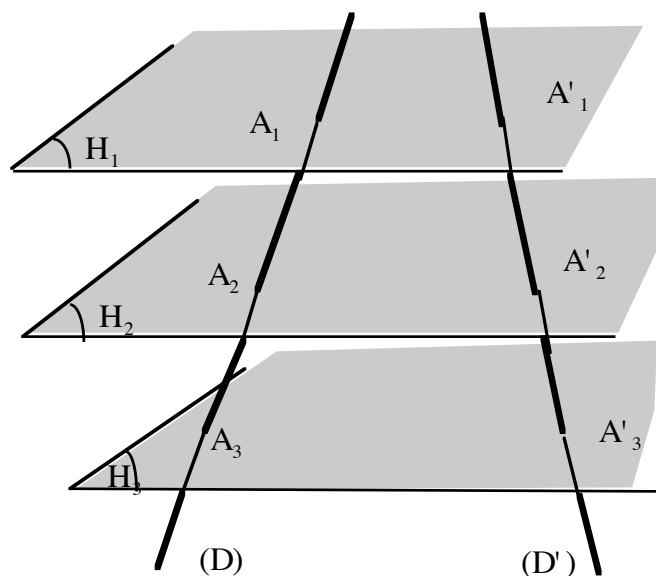
Alors, les points A_1, A_2 et A_3 (resp. A'_1, A'_2 et A'_3) sont distincts et $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}$.

Les points A_1, A_2 et A_3 (resp. A'_1, A'_2 et A'_3) sont distincts est une conséquence directe du théorème d'incidence et du fait que les hyperplans sont disjoints.

Soit Π la projection sur la droite D' parallèlement à la direction $\vec{H}$ alors, $\Pi(A_1) = A'_1$ car c'est l'unique point passant par D' et par l'hyperplan contenant A_1 de direction $\vec{H}$ (de même nous avons $\Pi(A_2) = A'_2$ et $\Pi(A_3) = A'_3$).

D'autre part, $A_1\vec{A_2} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} A_1\vec{A_3}$ et, $A'_1\vec{A'_2} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}} A'_1\vec{A'_3} = \vec{\Pi}(A_1\vec{A_3})$

et le résultat.

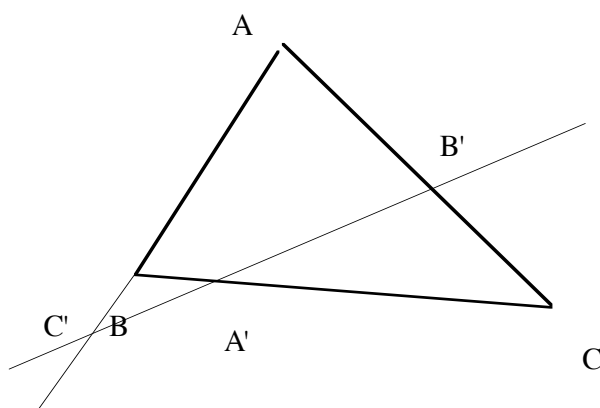


***LE THEOREME DE MENELAÛS**

Ménélaüs d'Alexandrie est un mathématicien et astronome grec du premier siècle.

Théorème: $(X, \vec{X})$ est un espace affine A, B et C trois points non alignés de X . On considère trois points A', B' et C' différents de A, B, C tels que A' est sur la droite (BC) , B' est sur la droite (AC) et C' est sur la droite (BA) Alors :

$$A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés si et seulement si } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$$



Les points A, B, C sont non alignés, ils constituent un repère affine R du plan affine engendré par ces points.

La matrice $M_R(A'B'C') = \begin{bmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{bmatrix}$ et son déterminant est égal à $acb + (1-a)(1-b)(1-c)$.

a)(1-b)(1-c).

Ce déterminant est nul si et seulement si les points sont alignés.

D'autre part, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = - (1-a)/a \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = - (1-b)/b \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -(1-c)/c$$

ce qui démontre le théorème.

***LE THEOREME DE CEVA**

Jean de Céva est un mathématicien italien du 17^{ème} siècle.

Théorème: Soient $(X, \vec{X})$ un espace affine, A, B et C trois points non alignés de X. On considère trois points A', B' et C' différents de A, B, C tels que A' est sur la droite (BC), B' est sur la droite (AC) et C' est sur la droite (BA) Alors :

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Les points A, B, C sont non alignés, ils constituent un repère affine R du plan affine engendré par ces points.

La matrice $M_R(A'B'C') = \begin{bmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{bmatrix}$

avec

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = - (1-a)/a \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = - (1-b)/b \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -(1-c)/c$$

Ainsi $\vec{BB'} = -\vec{AB} + b\vec{AC}$; $\vec{AA'} = a\vec{AB} + (1-a)\vec{AC}$ et $\vec{CC'} = (1-c)\vec{AB} - \vec{AC}$.

On distingue deux cas :

1) La droite (AA') est parallèle à la droite (BB').

Alors, $ab = a-1$ et la condition est équivalente à $b(c-1) + 1 = 0$ soit (BB') parallèle à (CC')

2) Sinon $ab \neq a-1$.

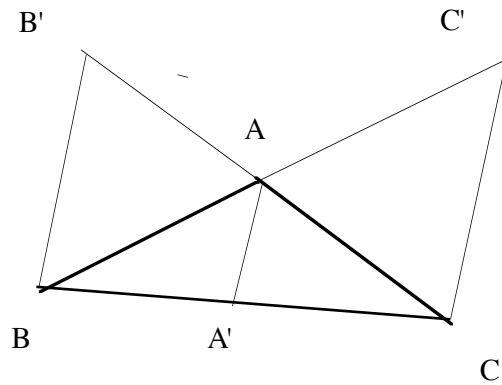
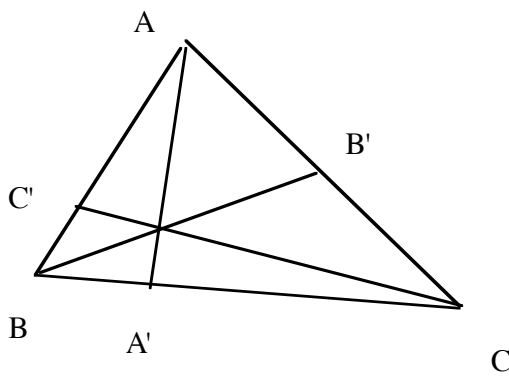
Un point M tel que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ est sur les trois droites si et seulement si x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} (1-a)x - ay = 0 \\ bx + y = b \\ -x - (1-c)y = c-1 \end{cases}$$

Le rang du système est 2, il y aura une solution unique si et seulement si le déterminant ci-dessous est nul.

$$\begin{vmatrix} 1-a & -a & 0 \\ b & 1 & b \\ -1 & c-1 & c-1 \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant et on trouve la condition.



Exercices du chapitre III

Exercice 1

Soient $(E, \vec{E})$ un espace affine et f une application affine de E dans E . On note F l'ensemble des points fixes de F . (c'est à dire $F = \{M \in E / f(M) = M\}$)

- 1) Montrer que F est soit vide soit une VLA de E dont on précisera la direction.
- 2) Soit Φ l'application de E dans $\vec{E}$, qui à un point M associe le vecteur $Mf(\vec{M})$. Montrer que Φ est une application affine et donner l'application linéaire associée. Retrouver les résultats de 1).

Exercice 2

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension 1, un plan affine. Soient A, B, C trois points non alignés du plan et trois scalaires α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$. On appelle f l'application qui à un point M de E associe $\text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)\}$.

- a) Montrer que f est affine et que f est une translation ou une homothétie.
- b) Ecrire la matrice représentant f dans le repère affine A, B, C et en déduire que f est une translation ou une homothétie.

Exercice 3

Soient A, B, C trois points non alignés d'un espace affine, soient A', B', C' trois points distincts de A, B, C tels que A' est sur la droite (BC) , B' sur (CA) et C' sur (AB) .

A) Autre démonstration du théorème de Ménélaüs. On définit les homothéties h_1, h_2, h_3 , par :

h_1 de centre A' de rapport $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, h_2 de centre B' de rapport $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$, h_3 de centre C' de rapport $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$

- 1) Calculer $h_1(C), h_2(A), h_3^{-1}(A)$.
- 2) On suppose que A', B', C' sont alignés. Montrer que $h_1 \circ h_2 = h_3^{-1}$, en déduire que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \mu \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \mu \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1 \quad (*)$$

- 3) On suppose que $(*)$ est vérifié. Montrer que $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ est l'identité. En déduire que A', B', C' sont alignés.

B) On note A'', B'', C'' les milieux respectifs de A et A', B et B' et de C et C' .

En utilisant les coordonnées barycentriques de $A', B', C', A'', B'', C''$ dans le repère A, B, C , montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si A'', B'', C'' sont alignés.

Exercice 4

Soit X un espace affine de dimension 3 et $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de X .

Soit f l'application affine de X dans X qui à un point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ définie par les relations :

$$\begin{cases} x' = y + z - 1 \\ y' = x + z - 1 \\ z' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que f est une bijection de X dans X .

Montrer que f admet un unique point fixe que l'on note I . Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\vec{f}$.

2) Déterminer les droites globalement invariantes par f (c'est à dire D telle que $f(D) = D$). Vérifier que toutes ces droites passent par I et sont incluses dans un plan à préciser.

3) Soit P un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Déterminer une équation du plan $f^{-1}(P)$.

En déduire les plans globalement invariants par f . Vérifier que tous ces plans contiennent le point I et la droite Δ d'équation : $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

Exercice 5

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine.

1) Montrer que toute application affine f telle que $f \circ f = f$ est une projection sur une VLA à préciser parallèlement à une direction à préciser.

2) Montrer que toute application affine f involutive ($f \circ f = \text{Id}$) est une symétrie autour d'une VLA à préciser parallèlement à une direction à préciser.

Exercice 6

Soit X un espace affine de dimension 3 et $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de X .

Soit f l'application affine de X dans X qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + z - 7 \\ y' = x - y - z - 1 \\ z' = -3x - 6y - 9 \end{cases}$$

1) Vérifier que f est une bijection de X dans X . Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\vec{f}$.

2) Montrer que f admet une droite de points fixes que l'on note Δ .

3) Donner une définition géométrique de f .

4) Que représente f^{-1} ?

Exercice 7

Soit X un espace affine de dimension 3 et $R=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de X . On considère les droites D' et D'' définies par leur équations paramétriques:

$$D' \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad D'' \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = 4 + u \\ z = u \end{cases}$$

1) Montrer que la VLA engendrée par les droites D' et D'' est un plan P dont on donnera une équation cartésienne.

2) Donner la matrice de projection sur P parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans le repère R .

3) Donner la matrice de symétrie autour de P parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans le repère R .

Exercice 8

Soient E un plan affine et A, B, C trois points non alignés du plan.

On définit le point C' par le relation : $\vec{CC'} = \vec{AB}$.

Soit f l'application affine de E dans E définie par :

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C'.$$

1) Montrer que f est bijective. Déterminer ses points invariants.

2) Montrer que pour tout point M de E , le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe.
Déterminer les droites globalement invariantes par f .

3) Soit $\vec{u} \in \vec{E}$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Montrer que $t_{\vec{u}} \circ f$ est une application affine ; comparer les parties linéaires de $t_{\vec{u}} \circ f$ et de f . Déterminer l'ensemble des points invariants de $t_{\vec{u}} \circ f$ (on discutera en fonction de u).

4) a) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC . Construire $f(G)$.
b) Soit M un point quelconque du plan. Construire $f(M)$.

Exercice 9

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension 2, un plan affine. Soit D une droite du plan affine.

Définition : On appelle transvection affine de base D toute application affine $g : E \rightarrow E$ telle que, tout point de la droite D est invariant par g et pour tout point M de E , $\vec{Mg(M)}$ appartient à $\vec{D}$.

1) Si D' est une droite de E telle que $\vec{D'} \neq \vec{D}$, on note $\sigma_{D'}$ la symétrie affine autour de D' parallèlement à $\vec{D}$.

a) Soient deux droites D_1, D_2 telles que D, D_1, D_2 soient distinctes et concourantes.

Montrer que $h = \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$ est une transvection affine de base D .

b) Soit g une transvection de base D .

Montrer qu'il existe deux droites D_1 et D_2 de directions différentes de $\vec{D}$, telles que $g = \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$.

2) Soit g une application affine. Montrer que g est une transvection affine de base D si et seulement si :

i) il existe I dans D tel que $g(I) = I$.

ii) il existe $\vec{c}$ dans $\vec{D}$, il existe $\vec{\varphi}$ forme linéaire de noyau $\vec{D}$ tels que

$$\text{si } \vec{u} \text{ est } \vec{E}, \vec{g}(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{\varphi}(\vec{u})\vec{c}$$

Lorsque $\vec{c} \neq 0$, on dit que $\vec{g}$ est une transvection vectorielle de droite $\vec{D}$.

Lorsque $\vec{c} = 0$ $\vec{g} = \text{Id}$.

3) On considère une application affine g pour laquelle la propriété ii) est vérifiée.

Montrer à l'aide d'un exemple que g n'est pas nécessairement une transvection affine.

4) Soient g_1 et g_2 deux transvections affines, différentes de Id , de bases respectives D_1 et D_2 , alors on a :

$$\text{si } \vec{u} \text{ est dans } \vec{E}, \vec{g}_i(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{\varphi}_i(\vec{u})\vec{c}_i; i = 1, 2.$$

Vérifier que $\vec{c}_1 \neq 0$ et $\vec{c}_2 \neq 0$.

a) On suppose $\vec{D}_1 \neq \vec{D}_2$, $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ est alors une base de $\vec{E}$.

Ecrire les matrices M_1 et M_2 associées respectivement à $\vec{g}_1$ et à $\vec{g}_2$ dans cette base.

Montrer que M_1 et M_2 sont semblables. En déduire qu'il existe un automorphisme $\vec{v}$ de $\vec{E}$ tel que :

$$\vec{g}_1 = \vec{v}^{-1} \circ \vec{g}_2 \circ \vec{v}$$

b) Etudier le cas $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$.

c) Montrer qu'il existe un automorphisme v de E tel que : $g_1 = v^{-1} \circ g_2 \circ v$.

Exercice 10 - Problème de construction dans le plan affine.

Soient D et D' deux droites sécantes en un point O .

Soit A un point du plan qui n'appartient ni à D ni à D' . On se propose de tracer par différentes méthodes la droite (OA) ... lorsque le point O est extérieur à la feuille de papier.

1) Soit S la symétrie de centre A , construire les images de D et D' par S . Conclure.

2) Soient B, B' 2 points de D , C, C' 2 points de D' tels que $(BC) \parallel (B'C')$. Montrer qu'il existe une homothétie qui transforme B en B' et C en C' . Construire l'image de A par cette homothétie. Conclure.

3) En se plaçant dans le plan affine euclidien : soient K (resp. L) la projection orthogonale de A sur D (resp. D'). On construit B intersection de (AK) avec D' et C intersection de (AL) avec D . Conclure.

Solutions des exercices du chapitre III

Exercice 1

1) On suppose F non vide. Si on choisit deux points M et M' dans F et un scalaire a , on note $G = \text{bary}\{(M, a), (M', (1-a))\}$. Puisque f est affine, $f(G) = \text{bary}\{(f(M), a), (f(M'), (1-a))\} = \text{bary}\{(M, a), (M', (1-a))\} = G$. Ainsi, F est une VLA.

Si M et M' sont dans F , alors $\vec{MM'} = f(M)\vec{f(M')} = \vec{f(MM')}$ et $\vec{MM'} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

Réciproquement, si M est dans F et si $\vec{u} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ alors il existe un point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$ par conséquent, $\vec{f(MM')} = \vec{MM'} = M\vec{f(M')}$ et $f(M') = M'$ et M' est dans F .

Ainsi, $\vec{F} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

2) On fixe un point A de E et on considère l'application g de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, définie par la relation :

M étant un point de E , $g(\vec{AM}) = \Phi(A)\Phi(M) = M\vec{f(M)} - A\vec{f(A)} = f(A)f(M) - \vec{AM}$.

$g = \vec{f} - \text{Id}$ est linéaire et par conséquent Φ est affine et g est son application linéaire associée.

L'égalité $\Phi(M) = 0$ exprime le fait que M est un point fixe de f . Ainsi, $F = \Phi^{-1}(0)$ est une VLA et sa direction est $\vec{F} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

Exercice 2

a) On fixe un point M de E et on considère l'application g de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, définie par la relation : N étant un point de E ,

$g(\vec{MN}) = f(M)f(N) = f(M)M + \vec{MN} + M\vec{f(N)}$. Ainsi,

$$g(\vec{MN}) = \alpha\vec{AM} + \beta\vec{BM} + \gamma\vec{CM} + \vec{MN} + \alpha\vec{NA} + \beta\vec{NB} + \gamma\vec{NC} = (\alpha + \beta + \gamma - 1)\vec{NM}$$

$$\text{et } g = -(\alpha + \beta + \gamma - 1)\text{Id}$$

Par conséquent, g est linéaire et f est affine d'application linéaire associée g .

On distingue deux cas :

1) Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors f est une translation de vecteur $A\vec{f(A)} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$.

2) Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors f est une homothétie de rapport $1 - \alpha - \beta - \gamma$. Si on note $G = \text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ alors $G\vec{f(G)} = \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = 0$ et G est le centre de cette homothétie.

b) On note R le repère affine (A, B, C) et R le repère cartésien associé, $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

$$M_R(f) = \frac{1}{1 + \alpha + \beta + \gamma} \begin{vmatrix} 1 + \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & 1 + \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & 1 + \gamma \end{vmatrix} ; M_R(f) = \frac{1}{1 + \alpha + \beta + \gamma} \begin{vmatrix} 1 + \alpha + \beta + \gamma & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On retrouve alors les résultats précédents.

Exercice 3

A) 1) Nous avons :

$$A' h_1(C) = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} A' C = A' B \text{ donc } h_1(C) = B$$

$$B' h_2(A) = \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} B' A = B' C \text{ donc } h_2(A) = C$$

$$C' h_3^{-1}(A) = \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} C' A = C' B \text{ donc } h_3^{-1}(A) = B$$

Ainsi, $h_1 \circ h_2(A) = B = h_3^{-1}(A)$ et $h_3 \circ h_1 \circ h_2(A) = A$.

2) On sait que le produit d'homothéties est une translation ou une homothétie de centre un barycentre des centres. On suppose que $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ n'est pas l'application identique. Alors on a l'alternative :

* $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ est une translation, ce qui est impossible puisque A est un point fixe.

* $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ est une homothétie, son centre est sur la droite (A'B'C') donc A, B, et C sont alignés ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ est l'application identique et le produit des rapports d'homothéties est 1.

3) Réciproquement, si la relation est vérifiée, le produit des rapports d'homothéties est 1 et, $h_3 \circ h_1 \circ h_2$ est l'application identique donc, $h_3^{-1} = h_1 \circ h_2$ et C' est barycentre de A' et B'. Ainsi A', B' et C' sont alignés.

B) On note R le repère affine (A, B, C), on obtient :

$$M_R(A'B'C') = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\beta & 0 \end{vmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \notin \{0,1\} \text{ et aussi,}$$

$$M_R(A'' B'' C'') = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \beta & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 1 & \gamma \\ \alpha & 1-\beta & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de ces matrices est $\alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ et $1/4(\alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma))$ ce qui donne la propriété.

Exercice 4

1) La matrice représentant f dans le repère est $M_R(f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, son déterminant

est deux donc f est une bijection.

Pour rechercher les points fixes, on résout le système
$$\begin{cases} x = y + z - 1 \\ y = x + z - 1 \\ z = x + y - 1 \end{cases}$$
 le système est de

Cramer il admet une solution évidente, le point I de coordonnées (1, 1, 1).

La matrice représentant $\vec{f}$ admet deux valeurs propres, -1 double et 2 simple. Le sous espace propre $\vec{E}_{-1}$ associé à la valeur propre -1 est engendré par les vecteurs de coordonnées (1, -1, 0) et (1, 0, -1), le sous espace propre $\vec{E}_2$ associé à la valeur propre 2 est engendré par le vecteur de coordonnées (1, 1, 1).

2) Si D est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par un point A(a, b, c), globalement invariante, alors si m et n sont dans D, f(m) et f(n) aussi et $f(\vec{m})f(\vec{n}) = \vec{f}(\vec{mn}) = \lambda \vec{u}$.

Ainsi $\vec{u}$ est vecteur propre de $\vec{f}$.

On distingue deux cas :

a) $\vec{u}$ est dans $\vec{E}_2$. On cherche a, b, c tels que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b+c-1-a & 1 \end{bmatrix} \\ & \text{rang de } \begin{bmatrix} a+c-1-b & 1 \end{bmatrix} \text{ est } 1 \\ & \begin{bmatrix} a+b-1-c & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On trouve $a = b = c$, équation de la droite passant par I et de vecteur directeur de coordonnées (1, 1, 1). Ainsi la direction de la droite est $\vec{E}_2$.

b) $\vec{u}$ est dans $\vec{E}_{-1}$. On cherche a, b, c tels que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b+c-1-a & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \text{rang de } \begin{bmatrix} a+c-1-b & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ est } 2 \\ & \begin{bmatrix} a+b-1-c & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On trouve $a+b+c-3 = 0$, équation d'un plan passant par I et de vecteur directeur de coordonnées (1, -1, 0) et (1, 0, -1). Ainsi la direction du plan est $\vec{E}_{-1}$.

3) P est le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Comme f est bijective, $f^1(P)$ est un plan. Si M(X, Y, Z) est un point de $f^1(P)$, f(M) est dans P et $\alpha(Y+Z-1) + \beta(X+Z-1) + \gamma(X+Y-1) + \delta = 0$ et ainsi $(\beta+\gamma)x + (\alpha+\gamma)y + (\alpha+\beta)z = \alpha+\beta+\gamma-\delta$ est une équation de $f^1(P)$.

Si P est globalement invariant, les équations de P et $f^1(P)$ sont proportionnelles. Ainsi,

$$\text{rang de } \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta & -\alpha-\beta-\gamma+\delta \end{bmatrix} = 1$$

On obtient les conditions: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)=0$ et $(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=0$ et $(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=0$ et $\gamma(-\alpha-\beta-\gamma+\delta)=\delta(\alpha+\beta)$. Ainsi on a l'alternative, soit $\alpha+\beta+\gamma=0$ et $\delta=0$ soit $\alpha=\beta=\gamma$ et $\delta=-3\alpha$.

Dans le premier cas, on obtient les plans d'équations $\alpha x + \beta y - (\alpha + \beta)z = 0 = \alpha(x - y) + \beta(y - z)$. C'est l'ensemble des plans contenant la droite Δ et le point I.

Dans le second cas, on obtient le plan $x + y + z = 3$.

En conclusion, Δ est la droite passant par I et de direction $\vec{E}_2$ et si P est le plan passant par I et de direction $\vec{E}_{-1}$. Les droites globalement invariantes par f sont la droite Δ et

les droites du plan P passant par I . Les plans globalement invariants sont le plan P et les plans passant par Δ .

Exercice 5

1) Si M_0 est un point de E , $f(f(M_0)) = f(M_0)$ et par conséquent $f(M_0)$ est un point fixe.

D'autre part, puisque $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$ l'application linéaire associée à f est un projecteur (vectoriel) sur $\text{Im } \vec{f}$ parallèlement à $\text{Ker } \vec{f}$.

Si M est un point de E , $\vec{f}(M\vec{f}(M)) = f(M)f(M) = 0$ et $M\vec{f}(M) \in \text{Ker } \vec{f}$ d'une part et d'autre part, $f(M_0)f(M) = \vec{f}(M_0\vec{M}) \in \text{Im } \vec{f}$ et $f(M) \in f(M_0) + \text{Im } \vec{f}$.

Ainsi, f est la projection sur la VLA, $f(M_0) + \text{Im } \vec{f}$ parallèlement à $\text{Ker } \vec{f}$.

2) Si M_0 est un point de E , le milieu N_0 de M_0 et de $f(M_0)$ est un point fixe de f . Puisque $\vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}$, alors $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}) = \vec{E}$ et $\vec{f}$ est une symétrie vectorielle autour de $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(\vec{f} + \text{Id})$.

Si M est un point de E , $\vec{f}(M\vec{f}(M)) = f(M)M$ et $M\vec{f}(M) \in \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id})$ d'une part et d'autre part, si N est le milieu de M et $f(M)$, alors on a :

$$\vec{f}(N_0\vec{N}) = N_0\vec{N} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \text{ et } N \in N_0 + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}).$$

Ainsi, f est une symétrie autour de la VLA, $N_0 + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(\vec{f} + \text{Id})$.

Exercice 6

1) La matrice représentant f dans le repère est $M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -9 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, son

déterminant est 9 donc f est une bijection.

La matrice représentant $\vec{f}$ admet deux valeurs propres, -3 double et 1 simple. Le sous espace propre $\vec{E}_{-3}$ associé à la valeur propre -3 est engendré par les vecteurs de coordonnées (1, 0, 1) et (0, 1, 2), le sous espace propre $\vec{E}_1$ associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur de coordonnées (1, -1, 3).

2) Pour rechercher les points fixes, on résout le système $\begin{cases} x = -4x - 2y + z - 7 \\ y = x - y - z - 1 \\ z = -3x - 6y - 9 \end{cases}$ le

système est de rang 2, il admet une solution évidente, le point I de coordonnées (-1, -1, 0).

L'ensemble des solutions est la droite passant par I et de direction $\vec{E}_1$.

3) La matrice représentant f sur le repère composé du point I et de la base de vecteurs propres, est diagonale, par conséquent, f est une affinité de rapport -3, de base la VLA passant par I et de direction $\vec{E}_1$ parallèlement au sous espace $\vec{E}_{-3}$.

4) La bijection réciproque est une affinité de rapport $-1/3$, de base la VLA passant par I et de direction $\vec{E}_1$ parallèlement au sous espace $\vec{E}_3$.

Exercice 7

1) Les droites D' et D'' se coupent en un point I de coordonnées (4, 5, 1) dans le repère R, elles définissent donc un plan P dont les vecteurs directeurs sont les vecteurs directeurs des droites. En éliminant les paramètres, on obtient une équation du plan :

$$5x - y - 9z - 6 = 0.$$

2) Si f est la projection sur P, M un point de E de coordonnées (x, y, z), f(M)=M' coordonnées (x', y', z'), alors :

Comme $\vec{Mf(M)}$ est colinéaire à $\vec{u}$, il existe un scalaire a tel que $x' - x = a$, $y' - y = a$ et $z' - z = a$. f(M)=M' est dans le plan P et $5(a+x) - (a+y) - 9(a+z) - 6 = 0$.

Ainsi, $a = 1/5(5x - y - 9z - 6)$; $x' = 1/5(10x - y - 9z - 6)$; $y' = 1/5(5x + 4y - 9z - 6)$; $z' = 1/5(5x - 4z - 6)$. La matrice de la projection sur P parallèlement à la droite vectorielle de direction $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans le repère R est donc :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 10 & -1 & -9 \\ 5 & -6 & 5 & 4 & -9 \\ -6 & 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

3) Si g est la symétrie autour de P, M un point de E de coordonnées (x, y, z) et g(M)=M' coordonnées (x', y', z'), alors :

Comme $\vec{Mg(M)}$ est colinéaire à $\vec{u}$, il existe un scalaire a tel que $x' - x = a$, $y' - y = a$ et $z' - z = a$, le milieu de M et M' est dans le plan P et $5(a+2x) - (a+2y) - 9(a+2z) - 12 = 0$.

Ainsi, $a = 1/5(10x - 2y - 18z - 12)$ et $x' = 1/5(15x - 2y - 18z - 12)$, $y' = 1/5(10x + 3y - 18z - 12)$, $z' = 1/5(10x - 2y - 7z - 12)$. La matrice de symétrie autour de P parallèlement à la droite vectorielle de direction $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans le repère R est donc :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -12 & 15 & -2 & -18 \\ 5 & -12 & 10 & 3 & -18 \\ -12 & 10 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

On remarquera le résultat bien connu, la matrice de symétrie est égale à 2 fois la matrice de projection moins la matrice unité.

Exercice 8

1) De la relation $\vec{CC'} = \vec{AB}$, on déduit que $C' = \text{bary}\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$ et par conséquent, si on note R le repère affine (A, B, C) et R le repère cartésien associé, (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$).

$$M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et f est bijective. Si M est un point invariant de coordonnées (x, y) dans R , alors $f(M)$ est de coordonnées $(x+y, y)=(x, y)$ et par conséquent on obtient la condition $y=0$, équation de la droite (AB) .

2) Si M est un point de E de coordonnées (x, y) dans R , alors $f(M)$ est de coordonnées $(x+y, y)$ et le vecteur $\vec{MM'}$ est de coordonnées $(y, 0)$ sur la base. Ainsi, la droite (MM') est parallèle à la droite (AB) .

Par conséquent, si D est une droite globalement invariante par f , D est parallèle à la droite (AB) . Réciproquement, si D est parallèle à (AB) alors l'image d'un point de la droite est sur la droite.

3) $t_{\vec{u}} \circ f$ est une application affine comme produit d'applications affines et les parties linéaires de $t_{\vec{u}} \circ f$ et de f sont égales. Si on note (a, b) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$, la matrice représentant $t_{\vec{u}} \circ f$ sur R est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les points invariants sont de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} a + x + y = x \\ b + y = y \end{cases}$$

Ainsi si $b \neq 0$ il n'y a pas de points invariants, si $b=0$ les points invariants sont les points de la droite d'équation $y = -a$, droite parallèle à (AB) passant par le point de coordonnées $(-a, 0)$.

4) a) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC , $f(G) = \text{bary}\{(B, 2/3), ((C, 1/3))\}$. $f(G)$ est sur la droite (BC) et la parallèle à (AB) passant par G .

b) Soit M de coordonnées (x, y) un point quelconque du plan, on cherche $\vec{u} (a, b)$ tel que M est point fixe de $t_{\vec{u}} \circ f$. On obtient $a = -y$ et $b=0$.

Ainsi la parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en un point N de coordonnées $(0, y)$ et la parallèle à (BC) passant par N coupe (BC) en P avec $\vec{AP} = \vec{u}$. On construit alors $f(M)$ à partir de $Mf(M) = -\vec{AP} = -\vec{u}$.

Exercice 9

1) a) On choisit le repère cartésien $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$, O est le point d'intersection des droites, $\vec{i}$ un vecteur directeur de D , $\vec{j}$ un vecteur directeur de D_1 .

$$M_R(\sigma_{D_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_R(\sigma_{D_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_R(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, D est une droite de points fixes de h et si $M(x, y)$ est un point de E , $h(M)(x+\lambda y, y)$ et le vecteur $Mh(M)(\lambda y, 0)$ est dans $\vec{D}$.

b) On choisit une droite D_2 de direction différente de $\vec{D}$, elle coupe D en un point O . On choisit le repère cartésien $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ un vecteur directeur de D , $\vec{j}$ un vecteur directeur de D_2 .

$$M_R(\sigma_{D_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_R(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_R(\sigma_{D_2}) M_R(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_R(\sigma_{D_2}) M_R(g)$ est une matrice de symétrie autour d'une droite D_1 de direction $\lambda \vec{i} - 2 \vec{j}$

passant par O et parallèlement à la direction $\vec{D}$.

2) Si g est une transvection, on choisit un point I de D et i) est vérifié. Si $\vec{u}$ est un vecteur, il existe un unique point M tel que $\vec{IM} = \vec{u}$ et il existe λ unique tel que :

$$\vec{g}(\vec{u}) = g(I)g(M) = \vec{IM} + M\vec{g}(\vec{M}) = \vec{u} + \lambda \vec{c}$$

On note $\vec{\varphi}$ l'application qui à $\vec{u}$ associe λ défini précédemment et $(\vec{g} - \text{Id})\vec{u} = \lambda \vec{c}$.

Ainsi, $\vec{\varphi}$ est une forme linéaire de noyau $\vec{D}$ et ii) est vérifiée.

Réciproquement, si g vérifie i) et ii) I est un point fixe et $\vec{c}$ une direction fixe donc la droite D passant par I et de direction $\vec{c}$ est invariante par g .

Si M est un point de E , tel que $\vec{IM} = \vec{u}$ alors :

$$\vec{g}(\vec{u}) = g(I)g(M) = \vec{IM} + M\vec{g}(\vec{M}) = \vec{u} + \vec{\varphi}(\vec{u})\vec{c} \text{ et } M\vec{g}(\vec{M}) = \vec{\varphi}(\vec{u})\vec{c}$$

et g est une transvection.

3) Pour construire un contre-exemple, il suffit de considérer une transvection n'ayant pas de point fixes, par exemple en composant avec une translation de vecteur non colinéaire à la direction de D .

4) $\vec{c}_1 \neq 0$ et $\vec{c}_2 \neq 0$ car les applications sont différentes de l'identité.

a) On obtient :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\varphi}_1(\vec{c}_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vec{\varphi}_2(\vec{c}_1) & 1 \end{bmatrix} \text{ et si } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vec{\varphi}_1(\vec{c}_2) & 0 \\ \vec{\varphi}_2(\vec{c}_1) & 0 \end{bmatrix} \text{ alors } P^{-1}M_2P = M_1 \text{ et le}$$

résultat (noter que puisque $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ est une base $\vec{\varphi}_2(\vec{c}_1)$ et $\vec{\varphi}_1(\vec{c}_2)$ sont $\neq 0$).

b) Si D_1 est parallèle à D_2 , on choisit $\vec{c}_1 = \vec{c}_2$ et $\vec{\varphi}_1 = \alpha \vec{\varphi}_2$ et on procède de la même façon.

c) $\vec{v}$ étant construit, il faut définir l'image d'un point. Si D_1 et D_2 se coupent en I , on pose $v(I) = I$, si D_1 est parallèle à D_2 on choisit un point J de D_1 et on pose $v(J) = J$.

Exercice 10

1) Si O est sur D et D' alors $S(O)$ est sur $S(D)$ et $S(D')$. On construit les images de D et D' et on obtient le point $S(O)$. Les points O , $S(O)$ et A sont alignés donc la droite $(AS(O))$ passe par O .

2) Le théorème de Thalès permet d'affirmer que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = k$ et par conséquent, l'homothétie de centre O et de rapport $1/k$ transforme B en B' , C en C' et A en A' . Le point A' est à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par B' et de la parallèle à (AC) passant par C' .

Les points A , A' et O sont alignés.

3) Dans le triangle OBC , les droites (BK) et (CL) sont des hauteurs sécantes en A et A est l'orthocentre du triangle. Ainsi, (OA) est orthogonale à (BC) et on construit la droite en menant de A la perpendiculaire à (BC) .
