Chapitre IV- STRUCTURES

L'ensemble des applications affines d'un espace affine dans un autre a une structure d'espace affine . Cet ensemble est très riche, il contient une grande quantité de sous ensembles ayant une structure de groupe pour la loi de composition des applications . Ce chapitre propose d'en étudier quelques unes.

1) Structure affine de l'ensemble des applications affines

Soient $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ deux espaces affines de dimension respectivement n et m.
On note A (X, Y) l'ensemble des applications affines de X dans Y.
A (X, Y) est un sous ensemble de l'ensemble des applications de X dans Y.
Si R et R' sont des repères cartésiens, respectivement de X et Y, on définit l'application ϕ qui à une application f de A (X, Y) associe la matrice représentant f dans les repères $M_{R',R}(f)$.

Si on note M(m+1, n+1) l'ensemble des matrices ayant m+1 lignes et n+1 colonnes à coefficients dans le corps K, ϕ : A (X, Y) $\rightarrow$ M(m+1, n+1) et Im ϕ est l'ensemble des matrices ayant 1 0 0 0 ... 0 en première ligne alors ϕ est injective et bijective sur son image.
On sait que M(m+1,n+1) est un espace vectoriel de dimension (m+1)(n+1) et Imϕ est une VLA de dimension (m)(n+1) puisque les matrices de Imϕ se décomposent de la façon ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \dots\ 0 \\ \boxed{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \dots\ 0 \\ \boxed{\mathbf{0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 \dots\ 0 \\ \boxed{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$$

Noter que l'ensemble des matrices de M(m+1,n+1) ayant la première ligne nulle est un espace vectoriel de dimension m(n+1).
ϕ étant bijective sur Imϕ, on choisit sur A (X,Y) la structure affine de façon que ϕ soit un isomorphisme d'espaces affines et ainsi, A (X,Y) est un espace affine de dimension m(n+1), son espace vectoriel associé étant l'ensemble des matrices de M(m+1,n+1) ayant la première ligne nulle.

2) Le groupe GA(X)

Soient $(X, \vec{X})$ un espace affine, A (X, X) est un espace affine muni de la loi de composition o . On note GA(X) l'ensemble des applications affines bijectives de X, (les isomorphismes affines de X). GA(X) est un groupe en général non commutatif .
Si L : GA(X) $\rightarrow$Gl($\vec{X}$) est l'application qui à f dans GA(X) associe L(f) = $\vec{f}$ (Gl($\vec{X}$) est l'ensemble des isomorphismes d'espaces vectoriels appelé groupe linéaire de $\vec{X}$) alors :
L est un morphisme surjectif de groupes pour les lois de composition d'application et on peut factoriser L.

On obtient le schéma habituel dans le cadre des groupes quotients:

$$\begin{tikzcd} GA(X) \arrow[r, "L"'] \arrow[d, "\Pi"'] & Gl(\vec{X}) \\ GA(X)/KerL \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad L = g \circ \Pi$$

Les aplications L, g et Π sont des morphismes de groupes, Π est la surjection canonique, g est un isomorphisme de groupes.
KerL est l'ensemble des translations de GA(X), c'est un sous groupe distingué de GA(X).
Les classes d'équivalences de GA(X) / KerL sont les applications affines ayant même application linéaire associée, deux applications sont équivalentes si elles sont égales à une translation près (f est équivalente à g si et seulement si il existe deux translation t et t' telles que $f = t \circ g = g \circ t'$).

3) Les sous groupes de GA(X).

Il y en a beaucoup, on peut citer :

A) Le sous groupe des translations, noté T(X)

T(X) est un sous groupe distingué de GA(X), il est commutatif.

B) Le sous groupe des homothéties de centre fixe O, et de rapport $k \neq 0$ noté $H_O(X)$.

$H_O(X)$ est un sous groupe commutatif de GA(X) isomorphe au groupe multiplicatif K*.

Si H est une homothétie de centre O et de rapport k, H^{-1} est une homothétie de même centre et de rapport 1/k .

On notera que le produit de deux homothéties de centre différent est une homothétie de centre un barycentre des centres ou une translation.

C) Le sous groupe des Homothéties-Translations noté HT(X).

On note HT(X) l'ensemble des isomorphismes affines qui transforment les droites affines de X en des droites parallèles. Plus précisément :

$$HT(X) = \{ f \in GA(X) \text{ / Si D est une droite affine de X alors } f(D) \text{ est parallèle à } D\}$$

Si f est dans HT(X), alors si $\vec{u}$ est dans $\vec{X}$, $\vec{f}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et on montre que $\vec{f}$ est colinéaire à l'application identique de $\vec{X}$.
Ainsi, HT(X) est l'ensemble des isomorphismes affines, d'application linéaire associée colinéaire à l'application identique de $\vec{X}$, c'est donc l'ensemble des homothéties et des translations.
HT(X) est un sous groupe distingué de GA(X) non commutatif.

D) Le sous groupe des isomorphismes affines ayant un point fixe M, noté $GA_M(X)$

Si M est un point donné de X**,** GA_M (X) est l'ensemble des éléments de GA(X) ayant pour point fixe M. GA_M (X) est un sous groupe de GA(X) isomorphe à $Gl(\vec{X})$.
Pour vérifier ce point, Il suffit de considérer la restriction de l'application L à $GA_M(X)$ de la partie 2.

Théorème : Si $f \in GA(X)$ et si M est un point donné , alors il existe $g \in GA_M(X)$ et une translation t uniques , tels que $f = t \circ g$.

Ainsi quitte à faire une translation, toute bijection affine peut-être considérée comme une bijection affine ayant un point fixe, le point fixe étant choisi n'importe où.
Existence : On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{mS(m)}$, alors $t^{-1} \circ f = g$ admet pour point fixe m et est telle que $f = t \circ g$.

Unicité : Si g, g', t et t' répondent à la question, $f = t \circ g = t' \circ g'$.
Dans ce cas, $t \circ t'^{-1} = g' \circ g^{-1} = Id$ puisque $t \circ t'^{-1}$ est une translation ayant pour point fixe M donc g = g' et t = t'.

On dit que GA(X) est le produit semi-direct de T(X) et GA_M (X), on écrit :

$$GA(X) = T(X) \circ GA_M(X).$$

E) Le sous groupe des isomorphismes conservant une figure F, noté $GA_F(X)$

On appelle figure F , un sous ensemble non vide de l'ensemble X. On dira que l'isomorphisme f de GA(X) conserve la figure si et seulement si f(F)=F.

On montre facilement que l'ensemble des isomorphismes de GA(X) conservant la figure est un sous groupe de GA(X) noté $GA_F(X)$.

Si F est réduit à un point, on retrouve le sous groupe des isomorphismes ayant un point fixe.
Si F est un repère affine de X, $GA_F(X)$ est un ensemble fini ayant n+1 éléments, isomorphe au groupe symétrique de S_{n+1}.

En effet , chaque élément f de $GA_F(X)$ est représenté par sa matrice dans le repère F, cette matrice ayant la particularité de contenir un 1 et un seul sur chaque ligne et chaque colonne. Chaque matrice représente une permutation de S_{n+1} et le produit de deux matrices correspond au produit des permutations correspondantes.
Par exemple, si on considère un repère affine (A, B, C) (trois points non alignés) dans le plan affine, l'ensemble des bijections affines qui conservent le triangle est isomorphe au groupe symétrique S_3 il y a donc 6 bijections affines qui conservent un triangle.

Exercices du chapitre IV

Exercice 1

Soit $(X,\vec{X})$ un espace affine de dimension $n \geq 2$, le corps de base est le corps des réels, Y un hyperplan affine de X et f une bijection affine ayant Y comme ensemble de points fixes. Dans ce cas, $\vec{Y}$ est un hyperplan vectoriel et sous espace propre de $\vec{f}$ pour la valeur propre 1.

Ainsi on a l'alternative soit $\vec{f}$ admet une valeur propre différente de 1 et on dit que f est une dilatation affine, soit 1 est la seule valeur propre et on dit que f est une transvection affine.
1)Montrer que si f est une dilatation, alors il existe un hyperplan affine Y et une droite vectorielle $\vec{D}$ supplémentaire de $\vec{Y}$ de telle façon que f est une affinité de base Y, de direction $\vec{D}$ et de rapport $k \neq 0$. Une dilatation est donc une affinité de base un hyperplan vectoriel.
2)Que peut-on dire de la matrice représentant une dilatation sur un repère cartésien ?
3)Que peut-on dire de la matrice représentant une transvection sur un repère cartésien, montrer qu'une transvection est le produit de deux dilatations.
4)Une bijection affine est le produit de transvections et de dilatations.(Penser à la méthode du pivot)
5) Le groupe GA(X) est engendré par l'ensemble des dilatations affines de X.

Exercice 2

Soit $(X,\vec{X})$ un espace affine, le corps de base est le corps des réels.
Déterminer l'ensemble des sous groupes finis de HT(X), groupe des homothéties - Translations (on montrera que si G est un sous groupe fini, alors les éléments de G sont des homothéties de rapport -1 ou des translations)

Exercice 3

Soit $(X,\vec{X})$ un espace affine, le corps de base est le corps des réels.
Soit G un sous groupe distingué de HT(X) non contenu dans T(X).
1)Montrer que G contient les translations.
2) Quels sont les sous groupes distingués de HT(X) contenus dans T(X) ?
3) Montrer que tout sous groupe distingué commutatif de HT(X) est un sous groupe de T(X).

Exercice 4

Soit $(X,\vec{X})$ un espace affine de dimension 2, on se propose de décrire l'ensemble des bijections affines qui conservent un parallélogramme.
On considère un repère affine A, B, C et on suppose que ABCD est un parallélogramme c'est à dire que $\vec{AB} = \vec{CD}$ par exemple.

1) Montrer que si f est une bijection affine conservant le parallélogramme, alors f à un point fixe que l'on notera O.

2) Montrer que O, A, B est un repère affine et étudier les matrices représentant les bijections affines conservant le parallélogramme.

3) Conclure.

Exercice 5

Soient $(X, \vec{X})$ et $(Y, \vec{Y})$ deux espaces affines, A(X, Y) l'ensemble des applications affines de X dans Y. On note $A(X,\vec{Y})$ l'ensemble des applications affines de X dans $\vec{Y}$, $\vec{Y}$ étant considéré comme espace affine sur lui même.

1) Vérifier que $A(X,\vec{Y})$ est un espace vectoriel.

2) Si f et g sont deux applications de A(X, Y), on note $\vec{fg}$ l'application de X dans $\vec{Y}$ qui à un point x de X associe le vecteur $\overrightarrow{f(x)g(x)}$. Montrer que cette application permet de définir sur A(X, Y), une structure d'espace affine, l'espace vectoriel associé étant $A(X,\vec{Y})$.

3)Si O est un point de X, on peut vectorialiser X au point O et par conséquent X a ainsi une structure vectorielle, on notera X_O cet espace vectoriel et $L(X_O, \vec{Y})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de X_O dans $\vec{Y}$.
Si on note E l'espace vectoriel des applications constantes de X dans $\vec{Y}$, montrer que l'on a la relation $A(X,\vec{Y}) = E \oplus L(X_O, \vec{Y})$.

4) Si on suppose que les espaces sont de dimension finie, dim(X) = n et dim(Y) = m, montrer que $\dim(A(X,\vec{Y})) = (n+1)m = \dim(A(X, Y))$.

Solutions des exercices du chapitre IV

Exercice 1

1)Si f est une dilatation, $\vec{f}$ admet deux valeurs propres, 1 et $k \neq 0$ puisque f est bijective. Comme le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est un hyperplan vectoriel, $\vec{f}$ est diagonalisable. On note $\vec{D}$ le sous espace propre associé à la valeur propre k, c'est une droite vectorielle supplémentaire de $\vec{Y}$. Dans un repère cartésien composé d'un point de Y et d'une base de $\vec{Y}$ et de $\vec{D}$, la matrice représentant f est diagonale et par conséquent f est une affinité de base Y, de direction $\vec{D}$ et de rapport k.
2) La matrice représentant la dilatation dans le repère décrit précédemment est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & : & : \\ : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & k \end{bmatrix}$$

Les matrices représentant une dilatation dans un repère cartésien doivent donc être de la forme ci-dessus après changement de repère. Par conséquent il faut que la partie linéaire soit une matrice diagonalisable ayant 1 pour valeur propre d'ordre n-1 et k pour valeur propre d'ordre 1. De plus il faut avoir un point fixe donc que la première colonne ait des 0 partout sauf 1 en première ligne et éventuellement en dernière ligne.
3) Si f est une transvection 1 est la seule valeur propre de $\vec{f}$ et le sous espace propre $\vec{Y}$ est un hyperplan vectoriel donc $\vec{f}$ n'est pas diagonalisable. D'après la décomposition de Jordan, il existe une base de $\vec{X}$ sur laquelle $\vec{f}$ est représentée par une matrice diagonale et un bloc d'ordre deux de Jordan. Si on choisit un point de Y comme origine et cette base on obtient une représentation matricielle de la forme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \quad \rightarrow & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow \quad 0 & I_{n-2} \\ 0 & \rightarrow \quad 0 & \end{bmatrix}$$

Les matrices représentant une transvection dans un repère cartésien doivent donc être de la forme ci-dessus après changement de repère. Par conséquent il faut que la partie linéaire soit une matrice ayant 1 pour unique valeur propre et que le sous espace propre associé soit de dimension n-1. De plus il faut avoir un point fixe donc que la première colonne soit telle que le système correspondant ait au moins une solution.
En particulier les matrices dont la partie linéaire est une matrice élémentaire (ayant des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs sauf en un coefficient) sont des matrices de transvections.
Pour montrer qu'une transvection est le produit de deux dilatations il suffit de montrer que la propriété soit vraie matriciellement.
Comme l'on a par exemple $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, la relation est facilement vérifiée.

4) Pour démontrer la propriété, il faut distinguer deux cas.

a) La bijection affine a un point fixe et en choisissant comme origine du repère ce point, on est ramené à une étude sur la partie linéaire.
La méthode du pivot de Gauss nous permet d'affirmer qu'une matrice inversible est le produit de matrices élémentaires qui sont des matrices de transvections ou de dilatations d'où le résultat.

b) La bijection affine n'a pas de point fixe et par conséquent est le produit d'une translation et d'une bijection ayant un point fixe. Il suffit donc de montrer qu'une translation est un produit de transvections et de dilatations et d'appliquer le point a).
Une matrice d'homothétie est le produit de matrices de dilatations, penser par exemple que l'on a le produit ci-dessous
:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Une translation est le produit de deux homothéties de centre différents et de rapport inverses l'un de l'autre.
Ainsi la propriété est démontrée et le groupe GA(X) est engendré par les transvections et les dilatations.
5) On a vu en 3) qu'une transvection était le produit de deux dilatations donc GA(X) est engendré par les dilatations. Noter que le résultat a été démontré à l'aide du calcul matriciel et par conséquent n'est vrai qu'en dimension finie.

Exercice 2

Si G est un sous groupe fini de HT(X), alors les éléments de G sont des homothéties ou des translations.
Si h(O, k) est une homothétie de G de centre O et de rapport k, alors quel que soit n entier naturel h(O, k^n) est une homothétie de G. Puisque G est fini k=±1 et h est une homothètie de rapport -1 ou une translation.
Si t est une translation de vecteur $\vec{u}$ appartenant à G, alors quel que soit n entier naturel la translation de vecteur $n\vec{u}$ est une translation de G. Puisque G est fini $\vec{u}$ est nul et la seule translation de G est l'application identique. Comme le produit de deux homothéties de centre différents est une translation, les seuls sous groupes finis de HT(X) sont G={Id} et si O est un point de X, G={Id, h(O,-1)}.

Exercice 3

1) Si G est un sous groupe de HT(X) non contenu dans T(X) alors G contient au moins une homothétie h(O, k). Comme G est distingué, si on choisit une homothétie g(M, s) alors $g^{-1} \circ h \circ g$, est dans G et $h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g$ aussi. .
La partie linéaire de $h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g$ est l'identité et par conséquent c'est une translation. L'image du point M va nous donner le vecteur de cette translation.

$U = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g(M) = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h(M)$,

$\vec{OU} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{Og^{-1} \circ h \circ g(M)}) = \frac{1}{k}(\vec{OM} + \overrightarrow{Mg^{-1} \circ h \circ g(M)}) = \frac{1}{k}(\vec{OM} + \frac{1}{s}\overrightarrow{Mh \circ g(M)})$

$= \frac{1}{k}(\vec{OM} + \frac{1}{s}\vec{MO} + \frac{1}{s}\overrightarrow{Oh \circ g(M)}) = \frac{1}{k}(\vec{OM} + \frac{1}{s}\vec{MO} + \frac{k}{s}\vec{OM})$

$\vec{OU} = \frac{s-1+k}{ks}\vec{OM}$ et $\vec{UM} = \frac{(1-k)(1-s)}{ks}\vec{OM}$

Ainsi les éléments de T(X) sont dans G.

2) Soit G un sous groupe distingué de HT(X) contenu dans T(X). L'application f de T(X) dans $\vec{X}$, qui à une translation associe le vecteur correspondant est un isomorphisme de groupes. Ainsi f(G) est un sous groupe additif de $\vec{X}$.

D'autre part, si $t_{\vec{u}}$ est une translation de G et h(O, k) une homothétie, alors $h^{-1} \circ t_{\vec{u}} \circ h$ est une translation de vecteur $\frac{1}{k}\vec{u}$ et par conséquent, f(G) est un sous espace vectoriel de $\vec{X}$.

Réciproquement, si G est un sous ensemble tel que f(G) est un sous-espace vectoriel, alors G est un sous groupe distingué de HT(X) contenu dans T(X).

3) Si G est un sous groupe distingué commutatif de HT(X) non contenu dans T(X), alors d'après 1) G contient les translations et comme une translation ne commute pas avec une homothétie, on aboutit à une contradiction. Ainsi, G est contenu dans T(X).

Exercice 4

On considère un repère affine A, B, C et on suppose que ABCD est un parallélogramme c'est à dire que $\vec{AB} = \vec{CD}$.

1) Si f est une bijection affine conservant le parallélogramme, alors f transforme l'isobarycentre O des points ABCD en lui même et par conséquent O est un point fixe.

2) Si O, A, B sont alignés, les quatre points ABCD aussi ce qui est contraire à l'hypothèse donc R = (O, A, B) est un repère affine.

La matrice représentant les points ABCD dans R est : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Une bijection affine sera donc déterminée à partir des images des points A et B. Comme f est bijective, le déterminant est non nul et par conséquent il existe 8 matrices possibles.

* Si A est transformé en A, alors B est transformé en B ou en C soit 2 matrices possibles.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

* Si A est transformé en B, alors B est transformé en A ou en D soit 2 matrices possibles.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

* Si A est transformé en C, alors B est transformé en A ou en D soit 2 matrices possibles.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

ainsi A est transformé en D, alors B est transformé en B ou en C soit 2 matrices possibles.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ainsi il y a 8 matrices possibles
3) Pour conclure, il faut vérifier que les matrices obtenues conviennent, c'est à dire sont les matrices représentant une bijection affine conservant le parallélogramme. Les matrices que l'on a construit représentent des applications affines bijectives (le déterminant est non nul) ayant O comme point fixe et telles que les images de A et de B sont toujours deux points dans {A, B, C, D}non alignés avec O (sinon la matrice ne serait pas inversible).
O est fixe et O est le milieu de deux points non alignés avec lui-même donc comme une application affine transforme un milieu en un milieu, les applications affines représentées par les matrices conservent le parallélogramme.

Exercice 5

1) $A(X,\vec{Y})$ est contenu dans $F(X,\vec{Y})$, l' espace vectoriel des applications de X dans $\vec{Y}$.
Il est non vide , il contient l'application nulle. Montrons que $A(X,\vec{Y})$ est un sous espace vectoriel de $F(X,\vec{Y})$.
Si f et g sont dans $A(X,\vec{Y})$ et si α et β sont deux scalaires, il faut vérifier que $\alpha f+\beta g = h$ est une application affine.
Si $x\in X$ est fixé, on considère l'application h' de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$ définie par : si $y \in X$,
$h'(\vec{xy}) = \overrightarrow{h(x)h(y)} = h(y)-h(x) = \alpha f(y)+\beta g(y)- \alpha f(x)-\beta g(x)$.
Ainsi, en regroupant les termes, $h'(\vec{xy}) = \alpha\ \overrightarrow{f(x)f(y)}+\beta\overrightarrow{g(x)g(y)}$ et $h'= \alpha\vec{f}+\beta\vec{g}$ est linéaire donc h est affine et $h'=\vec{h}$.
2) On veut définir une structure affine dans A(X, Y), l'espace vectoriel associé étant $A(X,\vec{Y})$. Pour cela on considère l'application Φ qui à f et g , deux éléments de A(X, Y), associe le vecteur Φ (f, g) = $\vec{fg}$, application de X dans $\vec{Y}$ qui à un point x de X associe le vecteur $\overrightarrow{f(x)g(x)}$.
* Φ (f, g) est affine puisque si x dans X est fixé et si y est dans X, alors :
$\overrightarrow{\vec{fg}(x)\vec{fg}(y)} = \overrightarrow{f(y)g(y)} -\overrightarrow{f(x)g(x)} = \overrightarrow{f(y)f(x)} +\overrightarrow{g(x)g(y)}=\vec{f}(\vec{yx})+\vec{g}(\vec{xy})$.

Ainsi $\vec{fg}(\overrightarrow{xy}) = \vec{g}(\overrightarrow{xy}) - \vec{f}(\overrightarrow{xy})$.

* Φ vérifie la relation de Chasles, puisque si f, g, h sont dans A(X, Y), alors si x est dans X on a $\overrightarrow{f(x)h(x)} = \overrightarrow{f(x)g(x)} + \overrightarrow{g(x)h(x)}$.

* Si f dans A(X, Y) est fixée et si h' est dans A(X,$\vec{Y}$), montrons qu'il existe g unique tel que Φ(f, g) = h'.

Il faut que pour tout x dans X, h'(x)= $\overrightarrow{f(x)g(x)}$ et par conséquent g(x) = f(x)+ h'(x) , cette condition nécessaire définit g (et l'unicité).
Soit donc g ainsi définie, g est clairement affine et telle que Φ(f, g) = h'.
3)On a vectorialisé X au point O et par conséquent X a une structure vectorielle. L(X_O, $\vec{Y}$) et E sont des sous espaces vectoriels de A(X,$\vec{Y}$).

* E $\cap$L(X_O, $\vec{Y}$) est réduit à l'application nulle . En effet si f est dans L(X_O, $\vec{Y}$), f(O) =0 et si de plus c'est une application constante, f est l'application nulle.
* Si f est dans A(X,$\vec{Y}$), alors si x est dans X, f(x) = f(O)+f(x)-f(O) =
f(O) + $\vec{f}(\overrightarrow{Ox})$, f se décompose en l'application constante (la constante est toujours f(O)) et une application de L(X_O, $\vec{Y}$) (application qui à x associe $\vec{f}(\overrightarrow{Ox})$).

Ainsi, A(X,$\vec{Y}$) = E $\oplus$L(X_O, $\vec{Y}$).

4) On peut remarquer que l'étude précédente n'a pas fait intervenir la notion de dimension et par conséquent le résultat est vrai en dimension infinie.
Si on suppose que les espaces sont de dimension finie, dim(X) = n et dim(Y) = m alors dim(A(X,$\vec{Y}$)) = dim(E) + dim(L(X_O, $\vec{Y}$)).
* E est isomorphe à $\vec{Y}$ et dim(E)=m.
* On sait que dim(L(X_O, $\vec{Y}$)= dim(X_O)dim($\vec{Y}$)= nm.
Ainsi, dim(A(X,$\vec{Y}$))= m+nm = m(n+1). On retrouve le résultat démontré matriciellement dans la première partie de ce chapitre.
