Chapitre VI - ESPACES AFFINES EUCLIDIENS GENERALITES

Un espace affine euclidien E est un espace affine dont l'espace vectoriel associé $\vec{E}$ est euclidien . Ainsi E est de dimension finie n et $\vec{E}$ est muni d'un produit scalaire et d'une norme. E est en particulier un espace affine et par conséquent toutes les notions et propriétés affines sont donc connues. Ce qui est intéressant, c'est d'étudier les nouvelles propriétés données par la structure euclidienne, distance, angles, orthogonalité...

Donnons tout d'abord quelques définitions spécifiques aux espaces affines euclidiens.

1) Définitions

-Un repère cartésien R =(O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$) de E est dit **repère cartésien orthonormé** (direct) si la base e est une base orthonormée (directe)

-Si Y et Z sont deux VLA non vides, on dira que Y et Z sont **orthogonales** si et seulement si leurs directions le sont c'est à dire si $\vec{Y}$ ¢ $\vec{Z}^{\perp}$ ou $\vec{Z}$ ¢ $\vec{Y}^{\perp}$.

De même on dira :

- Y et Z sont **perpendiculaires** si et seulement si :
$\vec{Z}^{\perp}$ et $\vec{Y}^{\perp}$ sont orthogonaux, c 'est à dire si $\vec{Z}^{\perp}$ ¢ $\vec{Y}$ ou $\vec{Y}^{\perp}$ ¢ $\vec{Z}$

- Y et Z sont **supplémentaires orthogonales** si et seulement si leurs directions le sont c 'est à dire si $\vec{Z}^{\perp} = \vec{Y}$ ou $\vec{Y}^{\perp} = \vec{Z}$.

Ainsi si Y est une VLA et si a est un point n'appartenant pas à Y , il existe un unique supplémentaire orthogonal de Y passant par a, c'est à dire $a + \vec{Y}^{\perp}$.

<u>Exemple 1:</u>

Dans l'espace euclidien de dimension 3, E_3 :

- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs directions sont orthogonales, elles sont perpendiculaires si elles se coupent et par conséquent définissent un plan et sont perpendiculaires dans ce plan.

- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

- Il existe une unique droite orthogonale à un plan passant par un point donné, mais deux droites perpendiculaires à une troisième ne sont pas parallèles.

Dans le plan E_2:

- Deux droites perpendiculaires sont supplémentaires orthogonales.

Exemple 2

Perpendiculaire commune à deux droites.

Théorème : Si D et D' sont deux droites distinctes, non parallèles et non concourantes d'un espace affine euclidien de dimension ≥ 3, alors il existe $M \in D$ et $M' \in D'$ uniques tels que la droite (MM') est perpendiculaire à D et D'. Cette droite est appelée perpendiculaire commune aux droites D et D'. De plus $\|\overrightarrow{MM'}\|$ est la distance de D à D'.

En effet, si on choisit un point A de D (resp. A' de D') et un vecteur directeur normé $\vec{u}$ de D (resp. $\vec{u}'$ de D').

Alors, si M est un point de D, il existe un réel k unique tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ (resp. si M' est un point de D, il existe un réel k' unique tel que $\overrightarrow{A'M'} = k'\,\vec{u}'$).

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = k\,\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + k'\,\vec{u}'\,;$$

$$(\overrightarrow{MM'}/\vec{u}) = 0 = -k + (\overrightarrow{AA'}/\vec{u}) + k'(\vec{u}'/\vec{u})\,;$$

$$(\overrightarrow{MM'}/\vec{u}') = 0 = k' + (\overrightarrow{AA'}/\vec{u}') - k(\vec{u}'/\vec{u})\;.$$

On obtient un système de Cramer puisque $(\vec{u}'/\vec{u}) \neq 1$ ($\vec{u}'$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires) par conséquent une solution unique pour k et k' donc pour M et M'.

2) Un espace affine euclidien est un espace métrique.

La distance est définie à partir de la norme, si x et y sont deux points de E espace affine euclidien, on pose $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$. On vérifie facilement que d est une distance sur E à l'aide des propriétés des normes. On montre de plus que:

* d est invariante par translation ; si $\vec{u}$ est un vecteur et x et y deux points de E, alors $d(x, y) = d(x+\vec{u}, y+\vec{u})$

* Si H est une homothétie de rapport k et si x et y sont deux points de E, alors :

$$d(H(x), H(y)) = |k|\, d(x, y)$$

* Si a, b, x sont des points de E alors :

d(a, b)=d(a, x) +d(x, b) si et seulement si x est dans le segment [a b].

Cette propriété est une conséquence directe du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

* Si Y est une partie non vide de E et si a est un point de E, on peut définir classiquement la distance de a à Y:

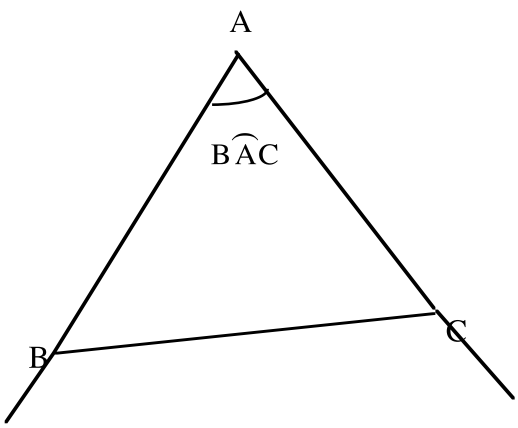
$$\boxed{d(a, Y) = \inf_{y \in Y} (d(a, y))}$$

3)Ecart angulaire

Un écart angulaire est défini dans le cadre des espaces non orientés et par conséquent est non orienté. Comme une demi-droite peut avoir une origine n'importe où, on présente les choses de la façon suivante :

Si A, B, C sont trois points distincts de E, on note $B\widehat{A}C$ l'écart angulaire des demi-droites engendrées par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ c'est à dire :

$$B\widehat{A}C = \mathrm{Arccos}\left(\frac{(\vec{AB}/\vec{AC})}{\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|}\right).$$



On rappelle que $B\widehat{A}C$ est un élément de l'intervalle [0, p] et que l'on a les propriétés suivantes :

* $B\widehat{A}C = C\widehat{A}B$.

* $B\widehat{A}C$ = p/2 si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

* $B\widehat{A}C$= 0 ou p si et seulement si A, B et C sont alignés.

* $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{BA}\| \, \|\vec{AC}\| \cos B\widehat{A}C$, et en particulier le théorème de Pythagore lorsque les vecteurs sont orthogonaux.

* La relation

$$B\widehat{A}C + B\widehat{C}A + A\widehat{B}C = p$$

* La formule de la médiane:

Si M est le milieu de B et C on a $\|\vec{BA}\|^2+\|\vec{AC}\|^2=2\|\vec{MA}\|^2+\frac{1}{2}\|\vec{BC}\|^2$ et

$$\|\vec{BA}\|^2-\|\vec{AC}\|^2=2(\vec{AM}/\vec{CB})$$

On peut définir de façon analogue l'écart angulaire de deux droites concourantes, définies à partir de deux points:
Si (AB) et (AC) sont deux droites, on appelle écart angulaire des deux droites le nombre noté $((BA)\widehat{,}(AC))=\text{Arccos}\left(\left|\frac{(\vec{AB}/\vec{AC})}{\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|}\right|\right)$.
On rappelle que $((BA)\widehat{,}(AC))$ est un élément de l'intervalle [0, p/2] et que l'on a les propriétés suivantes :

*$((BA)\widehat{,}(AC))=$ p / 2 si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

*$((BA)\widehat{,}(AC))=0$ si et seulement si A, B et C sont alignés.

*$((BA)\widehat{,}(AC))=B\widehat{A}C$ ou p $-B\widehat{A}C$.

Hyperplan médiateur et sphère circonscrite.

Définition : Soient B et C deux points distincts de E de milieu M. Les points N de E tels que $\|\vec{NB}\|=\|\vec{NC}\|$ forment l'hyperplan affine passant par M et de direction $\text{Vect}\{\vec{BC}\}^{\perp}$ appelé **hyperplan médiateur de B et C.**
Si B, B_1, B_2, ..., B_n sont n+1 points affinements indépendants de E, (dimE = n) alors il existe une unique sphère contenant ces points appelée **sphère circonscrite à ces points.**

Pour n =2 on dit plutôt médiatrice et cercle circonscrit.

a) la formule de la médiane, permet de dire que $\|\vec{NB}\|=\|\vec{NC}\|$ si et seulement si les droites (NM) et (CB) sont orthogonales.

b) Appelons M_i le milieu de B et B_i, pour i=1, ..., n.
Le même argument que ci-dessus montre que :
$\|\vec{NB}\|=\|\vec{NB}_1\|=\|\vec{NB}_i\|$ ...$=\|\vec{NB}_n\|$ si et seulement si $(\vec{NM}_i/\vec{BB}_i)=0$ pour i = 1 à n.
Comme $\vec{NM}_i=\vec{BM}_i+\vec{NB}=\vec{BB}_i/2+\vec{NB}$ ces conditions sont équivalentes à dire que N est solution du système linéaire suivant:

$$\|\vec{BB}_i\|^2=-2\ (\vec{NB}/\vec{BB}_i)\text{ pour i =1 à n.}$$

Les B_i étant affinement indépendants il y a unicité de la solution.

4) Angles orientés

A) Angles orientés dans le plan euclidien.

La notion d'écart angulaire de deux vecteurs d'un espace euclidien non orienté a un gros défaut, elle ne vérifie pas la relation de Chasles. Pour remédier à ce problème on construit la notion d'angles orientés, compatible avec la composition des rotations.
Le concept d'angle orienté est basé sur une particularité des espaces euclidiens de dimension 2 (non orientés) qui est la suivante :
Si $\vec{E}_2$ est un espace euclidien de dimension 2 et si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de norme 1, alors il existe une unique rotation vectorielle (un automorphisme orthogonal de déterminant 1) qui transforme $\vec{x}$ en $\vec{y}$.
Si **U** désigne l'ensemble des vecteurs de norme 1 de $\vec{E}_2$ et si $SO(\vec{E}_2)$ désigne l'ensemble des rotations, on définit ainsi une application $A : \mathbf{U}\times\mathbf{U} \to SO(\vec{E}_2)$, qui à $\vec{x}$ et $\vec{y}$ associe la rotation qui transforme $\vec{x}$ en $\vec{y}$. Cette application est surjective mais non injective.
Si $(\vec{x}, \vec{y})$ est un couple de vecteurs de **U**, on appelle angle orienté du couple et on note $(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ la classe d'équivalence du couple pour la relation d'équivalence associée à l'application A.
Ainsi, si $(\vec{x}, \vec{y})$ et $(\vec{x}', \vec{y}')$ sont deux couples de vecteur de **U**, on dira qu'ils ont même angle orienté si et seulement si $A(\vec{x}, \vec{y})=A(\vec{x}', \vec{y}')$.
L'ensemble des angles orientés est l'espace quotient $A = \mathbf{U}\times\mathbf{U}/A$, et A est en bijection avec $SO(\vec{E}_2)$. Cette bijection, permet de construire sur A une structure (une addition) de groupe isomorphe au groupe $SO(\vec{E}_2)$.

Noter que cette notion d'angle orienté est définie indépendamment d'une orientation de l'espace.

Pour donner une mesure de l'angle, il faut choisir une orientation.
Si on oriente l'espace $\vec{E}_2$, c'est à dire si l'on choisit une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$, alors il existe un isomorphisme d'espaces euclidiens, Φ de $\vec{E}_2$ dans le corps des complexes , tel que $\Phi(\vec{i}) = 1$ et $\Phi(\vec{j}) = i$. Cet isomorphisme va permettre de construire une mesure de l'angle :

Définition : Si $(\vec{x}, \vec{y})$ sont deux vecteurs de U, on appelle mesure de l'angle orienté et on note :

$$\mathrm{mes}(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \mathrm{Argument}\left(\frac{\Phi(\vec{y})}{\Phi(\vec{x})}\right)\mathrm{modulo}\ [2\pi]$$

B) Angles orientés dans un espace affine euclidien.

Toutes les notions d'angle orienté se ramènent au concept d'angle orienté dans le plan euclidien.

Si A, B, C sont trois points d'un espace affine euclidien orienté , alors on oriente le plan contenant les trois points et on définit une mesure de l'angle des demi-droites (AB) et (AC) notée $\left((AB)\widehat{,}(AC)\right) = B\hat{A}C$.
$B\hat{A}C$ étant défini de la façon suivante :

$$\text{Si } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \text{ et } \vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}, \text{ on note } B\hat{A}C = \operatorname{mes}(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}) \bmod[2\pi]$$

On a les propriétés suivantes :

* La relation de Chasles : Si A, B, C, D sont dans un même plan orienté, alors :

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C \qquad \bmod[2\pi].$$

* $B\hat{A}C = -C\hat{A}B \quad \bmod[2\pi]$.

* $B\hat{A}C = 0$ ou π (mod[2π]) si et seulement si A, B, C sont alignés.

* $B\hat{A}C = \pi/2$ ou $3\pi/2$ (mod[2π]) si et seulement (AB) et (AC) sont orthogonales.

Si on veut définir l'angle orienté de deux droites concourantes à partir des notions précédentes, il faut tenir compte du fait qu' une droite admet toujours deux vecteurs directeurs normés (de directions opposées).
Ainsi si deux droites (D) et (D') se coupent en un point A et si B ≠ A est sur (D) et C ≠A est sur (D') et si le plan défini par les deux droites est orienté, une mesure de l'angle orienté des droites notée $\left((D)\widehat{,}(D')\right) = B\hat{A}C$ (mod[π]).

C)Relation entre une mesure de l'angle orienté et l'écart angulaire.

On se place dans un le plan affine euclidien orienté et on considère trois points A, B et C. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe de la direction du plan.
Si $\alpha = B\hat{A}C \quad \bmod[2\pi]$, alors $\cos(\alpha) = \cos(B\overset{\frown}{A}C)$ et $\sin(\alpha)$ est de même signe que $\operatorname{Det}(M_{\vec{e}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$ et par conséquent l'on a :

$$\alpha = B\overset{\frown}{A}C \text{ si } \operatorname{Det}(M_{\vec{e}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) \geq 0 \text{ et } \alpha = 2\pi - B\overset{\frown}{A}C \text{ si } \operatorname{Det}(M_{\vec{e}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) < 0$$

5) Relations dans le triangle.

On se place dans un le plan affine euclidien. Un triangle ABC est la donnée d'un repère affine de ce plan . On peut choisir une orientation du plan de façon que les angles orientés du triangle, admettent une mesure dans l'intervalle $]\,0, \pi\,[$ et par conséquent coïncident avec les écarts angulaires correspondants.

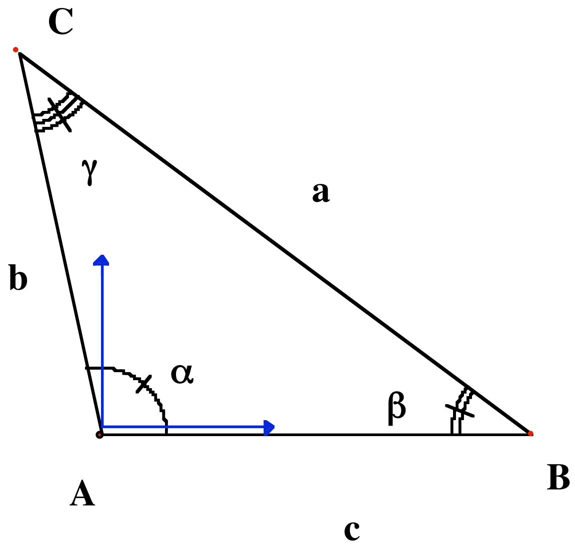
En effet, si on choisit le repère orthonormé direct défini par le point A et les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 \text{ tel que } k = (\vec{e}_2 / \vec{AC}) \geq 0.$$

Ainsi on obtient,

$$\begin{cases} \vec{AB} = c\vec{e}_1 \\ \vec{AC} = \lambda\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 \\ \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = (-c+\lambda)\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}(M_{\vec{e}}(\vec{AB},\vec{AC})) = ck = \mathrm{Det}(M_{\vec{e}}(\vec{BC},\vec{BA})) = \mathrm{Det}(M_{\vec{e}}(\vec{CA},\vec{CB}))$$



On pose classiquement :

$$a = \|\vec{BC}\|,\ b = \|\vec{AC}\|,\ c = \|\vec{BA}\|, \alpha = B\widehat{A}C, \beta = A\widehat{B}C, \gamma = B\widehat{C}A.$$

Alors, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$, $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos(\gamma)$;
$\cos(\alpha) = (-a^2 + b^2 + c^2) / 2bc$, $\cos(\beta) = (a^2 - b^2 + c^2) / 2ac$, $\cos(\gamma) = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ba$.

Comme $\sin(\alpha)$ par exemple est positif et que $\sin^2(a)+\cos^2(a) = 1$, on obtient en désignant par p le demi-périmètre du triangle ($2p = a+b+c$):

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b^2+c^2-a^2}$$

et des relations analogues pour β et γ .

L'aire du triangle est $S = 1/2\left|\mathrm{Det}(M_{\vec{e}}(\vec{AB},\vec{AC}))\right| = 1/2\, bc\sin(\alpha)$ et,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2S}}$$

Calcul des hauteurs en fonction des côtés.

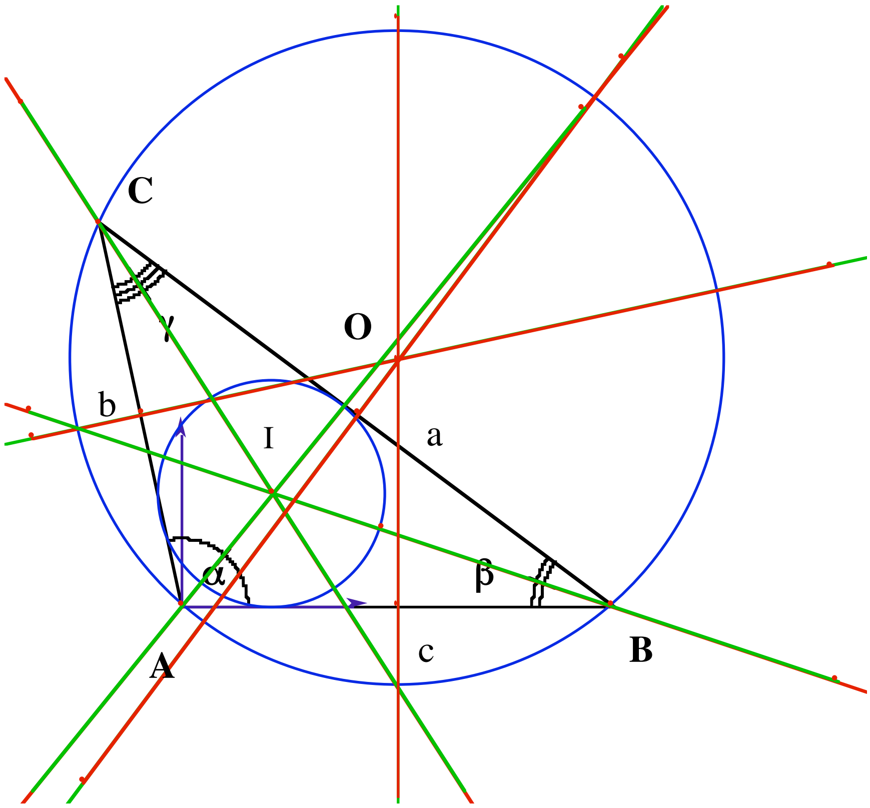
Une hauteur est une droite passant par un sommet et orthogonale au côté opposé. On note h_A (resp. h_B et h_C)la hauteur passant par A (resp. B et C) et on rappelle que les hauteurs se coupent en un point H appelé orthocentre.

$$S = \frac{1}{2}ah_A = \frac{1}{2}bh_B = \frac{1}{2}ch_C$$

$$h_A = \frac{2S}{a}\ ; \quad h_B = \frac{2S}{b}\ ; \quad h_C = \frac{2S}{c}\ .$$

Soit par exemple la formule :

$$\boxed{h_A = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$



Relations dépendant du cercle circonscrit.

Le cercle circonscrit au triangle est l'unique cercle passant par les points A, B, C . Le centre O du cercle circonscrit est l'intersection des trois médiatrices, droites orthogonales à un côté et passant par le milieu de ce côté. On note R le rayon de ce cercle.

On obtient à partir du théorème de l'arc capable :

$$a = 2R\sin(\alpha) \text{ et } \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

et ainsi :

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

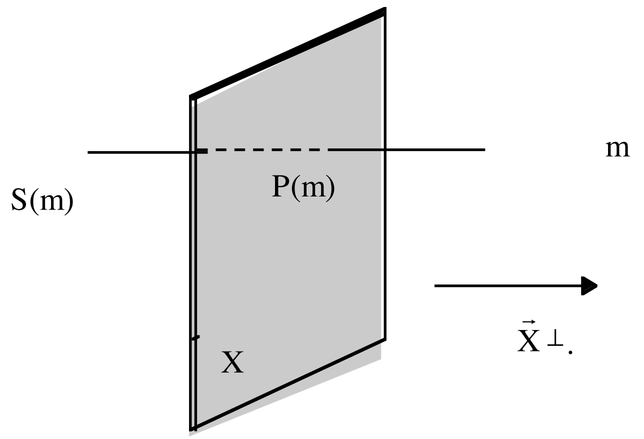
Relations dépendant du cercle inscrit.

L'intersection des trois bissectrices intérieures est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés.
Ce cercle est le cercle inscrit au triangle .On note I le centre de ce cercle et r le rayon .
On peut calculer l'aire en additionnant l'aire des trois triangles IAB, IBC et ICA on obtient :

$$\boxed{2S = r(a + b + c) = 2rp \quad \text{et} \quad r = \frac{S}{p}}$$

6) Projections et symétries orthogonales.

Si E est un espace affine euclidien et si X est une VLA de E , on appelle **projection orthogonale** sur X la projection sur X parallèlement à $\vec{X}^{\perp}$. De même, on appelle **symétrie orthogonale** sur X la symétrie sur X dans la direction $\vec{X}^{\perp}$. et **affinité orthogonale** sur X de rapport k l'affinité sur X de rapport k, dans la direction $\vec{X}^{\perp}$.



Si X est une VLA de E et si m est un point de E, la distance de a à X est alors :

$$\boxed{d(m, X) = \operatorname*{Inf}_{y\in X}(d(m,y)) = \operatorname*{Inf}_{y\in X}(\|\overrightarrow{my}\|) = \|\overrightarrow{P(m)y}\|}$$

Si P(m) désigne la projection orthogonale de m sur Y, il est clair que l'inf est réalisé au point P(m).

Application: Distance d'un point à un hyperplan affine.

Si E est un espace affine euclidien de dimension n et $R = (O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ un repère cartésien orthonormé de E.

Si Y est un hyperplan affine de E représenté par son équation $t + \sum_{i=1}^{i=n} x_i u_i = 0$ dans le repère et si M est un point de E de coordonnées m_i alors:

$$d(M,Y) = \left| \frac{t + \sum_{i=1}^{i=n} u_i m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2}} \right|$$

Soit N de coordonnées n_i la projection orthogonale de M sur Y , N est dans Y et par conséquent $t + \sum_{i=1}^{i=n} n_i u_i = 0$. D'autre part, le vecteur $\vec{MN}$ étant dans l'orthogonal de $\vec{Y}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées u_i , $i = 1, \ldots, n$.

Ainsi $\vec{MN} = \alpha\,\vec{u}$, $n_i - m_i = \alpha\, u_i$ pour i =1 à n et par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{i=n} (n_i - m_i) u_i = \alpha \,\|\vec{u}\|^2.$$

On obtient $d(M,Y) = |\alpha|\,\|\vec{u}\|$ et le résultat.

On remarquera que les relations précédentes permettent d'obtenir les coordonnées de N , projection de M sur Y en fonction des coordonnées de M puisque $n_i = m_i + \alpha\, u_i$.

Exemple pour n=3 si M(x, y, z) est un point de E et Y d'équation aX+bY+cZ+t=0,

alors $d(M, Y) = \left|\dfrac{ax + by + cz + t}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}\right|$ d'une part et si N(x', y', z') alors :

$$x'(a^2+b^2+c^2) = (b^2+c^2)x - aby - acz - at$$
$$y'(a^2+b^2+c^2) = -bax + (a^2+c^2)y - bcz - bt$$
$$z'(a^2+b^2+c^2) = -cax - bcy + (a^2+b^2)z - ct$$

Ainsi on obtient la matrice de projection orthogonale sur le plan.

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & 0 & 0 & 0 \\ -a & b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -b & -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -c & -ca & -cb & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Exercices du chapitre VI

Exercice 1

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé, (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère trois points de E, A, B et C de coordonnées respectivement (1,-1,0), (2,1,-3) et (0,2,-1) dans ce repère.

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
b) Décrire l'ensemble des points équidistants de A et de B.
c) Décrire l'ensemble des points équidistants de A, de B et de C.
d) Si D est le point (1,1,1), décrire l'ensemble des points équidistants de A, B, C et D.

Exercice 2

Soient A, B et C 3 points du plan affine euclidien (P).
a) Montrer qu'il existe un point G unique tel que : $2\vec{GA}+\vec{GB}-\vec{GC} = 0$.
b) Soit f l'application de (P) dans € qui au point M associe le réel:

$$f(M) = 2\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 - \|\vec{MC}\|^2$$

Montrer que $f(M) = f(G) + 2\|\vec{MG}\|^2$ et en déduire que f admet un minimum absolu G.
(c'est à dire si M est dans (P) alors: [M≠Gimplique f(M) >f(G)])

c) Déterminer les coordonnées de G et calculer f(G) lorsque (P) est rapporté à un repère orthonormé R = (O, $\vec{i}, \vec{j}$) et A, B, C sont de coordonnées respectivement (1,1), (-1,2) et (-3,-4) dans ce repère.

Exercice 3

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et ABCD un parallélogramme de E (A, B, C, D sont des points vérifiant la relation $\vec{AB} = \vec{DC}$).
Montrer que $\|\vec{AB}\|^2+\|\vec{BC}\|^2+\|\vec{CD}\|^2+\|\vec{DA}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2+\|\vec{BD}\|^2$.

Exercice 4

Soit (D) un droite de l'espace affine euclidien E (dimension 3) et soient A et B deux points de E. On considère l'application f de (D) dans €+ qui à M é (D) associe :

$$f(M) = 2\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2$$

a) Montrer qu'il existe un point I unique tel que $2\vec{IA}+\vec{IB} = 0$.
b) Montrer que si M est dans (D) alors, $f(M) = 3\|\vec{MI}\|^2 + 2/3\|\vec{AB}\|^2$.
c) Soit H le projeté orthogonal de I sur (D) . Montrer que si M est dans (D) \{H} alors, f(M) > f(H).
d) Si E est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), déterminer analytiquement le point H pour lequel la relation : [M est dans (D) \{H} alors, f(M) > f(H)] est vérifiée,

lorsque A et B sont les points de coordonnées respectivement (1,-2,1) et (2,1,-2) et (D) est la droite passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ (2, -1, 1) pour vecteur directeur.

Exercice 5

Soit E un espace affine euclidien de dimension trois rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
Soit (D) la droite passant par le point A (1,1,0) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2, -1, 1). Calculer les coordonnées du point M' symétrique orthogonal du point M(x,y,z) par rapport à la droite (D).

Exercice 6

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
Donner une équation paramétrique de la droite (D) passant par le point A (1,-2,0) et orthogonale au plan (P) d'équation x-2y+3z-2=0. Quelle est la distance du point A au plan (P) ?

Exercice 7

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

a)Soit (P) un plan de repère cartésien, (B,$\vec{u}$, $\vec{u}$') avec.$\vec{u}$(1, -2, 3) et $\vec{u}$'(2, 1, -1). Donner une équation paramétrique de la droite (D) orthogonale à (P) et passant par le point A (-1,0,1) (on notera que (D) ne dépend pas de B !).
Si B(1,1,1) donner la distance de A à (P).

b)Soient 3 points A(1,-2,-1), B(2,0,-3), C(-1,2,-2). Donner une équation cartésienne du plan (P) contenant A et orthogonal à la droite (BC).

Exercice 8

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
Soit (P) le plan d'équation 6x-3y-5z-6=0 et le point A(4,-2, 0).

a)Donner une équation paramétrique de la droite (D) orthogonale à (P) passant par A.

b)Donner les coordonnées du point d'intersection de (D) et (P).

c)Donner les coordonnées du symétrique orthogonal de A par rapport au plan (P).

Exercice 9

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 . Si D et D' sont deux droites non parallèles de E alors il existe une et une seule droite Δ appelée la perpendiculaire commune aux droites D et D'. Si on note H (resp. H') l'intersection de D (resp. D') avec Δ. La distance de D à D' notée $d(D,D') = \|\overrightarrow{HH'}\|$.

a) On note $\vec{w}$ un vecteur directeur de la droite Δ, montrer que : Si M est un point de D et si M' est un point de D' alors $d(D,D') = \dfrac{\left|(\overrightarrow{MM'} / \vec{w})\right|}{\|\vec{w}\|}$.

b) Si E est rapporté à un repère orthonormé, déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites D et D' respectivement définies par :

$$(D)\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x + y + -z - 1 = 0 \end{cases} \qquad (D')\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}$$

et calculer $d(D,D')$.

Exercice 10

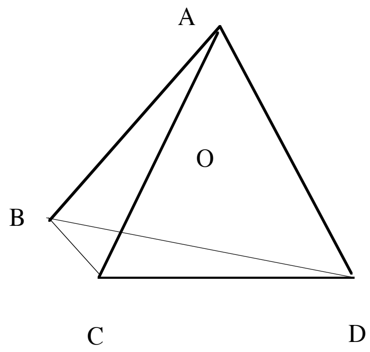
Soit E un espace affine euclidien de dimension n. On dira qu'une famille $A_1, A_2,..., A_{n+1}$ de n+1 points de E vérifie la propriété (P) si et seulement si :
[il existe O dans E et il existe h réel tels que si i,j sont dans $\{1,2,...,n+1\}$alors, $(\overrightarrow{OA_i} / \overrightarrow{OA_j}) = h$ si $i\neq j$ et 1 si $i=j$]

I) On considère une famille $A_1, A_2,..., A_{n+1}$ de n+1 points de E distincts vérifiant la propriété (P) . Montrer qu'alors :

a) Le réel h est dans l'intervalle [-1,1] (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et que $h \neq 1$.
b) Si $n > 1$ h est aussi différent de -1.
c) La famille $A_1, A_2,..., A_{n+1}$ est un repère affine de E.
d) O est l'isobarycentre de la famille $A_1, A_2,..., A_{n+1}$.
e) $h= -1/n$.
f) Le nombre $\|\overrightarrow{A_iA_j}\|$ est indépendant de i et de j.

II)
a) Si E est le plan affine euclidien (cas n=2) et A, B, C sont trois points distincts vérifiant la propriété (P) alors ils sont non alignés et définissent un triangle équilatéral.
Réciproquement, si ABC est un triangle équilatéral donner une condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C vérifie la condition (P).

b)Si E est l'espace affine euclidien (cas n=3) et A, B, C et D sont quatre points distincts vérifiant la propriété (P) alors trois points quelconques d'entre eux , sont non alignés et définissent un triangle équilatéral.
D'après I) ABCD est un tétraèdre régulier d'isobarycentre O, donner l'écart angulaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.


A
O
B
C
D

Solutions des exercices du chapitre VI

Exercice 1

a) La matrice $M_R(A, B, C)$ est de rang 3 et par conséquent les points sont non alignés.

b)L'ensemble $P = \{M \text{ dans } E \ / \ \|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|\}$ est le plan médiateur de A et B. Si M est un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère, alors M est dans P si et seulement si :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$$

soit $2x+4y-6z = 12$, équation du plan P.

Noter que P passe par le milieu de AB et de vecteur normal, $\vec{AB}$ (1, 2, -3).

c) L'ensemble $D = \{M \in E \ / \ \|\vec{MA}\| = \|\vec{MA}\| = \|\vec{MC}\|\}$ est l'intersection des plans médiateurs de A et B, de A et C et de B et C. Si M est un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère, alors M est dans P si et seulement si :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2 = (x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$$

soit $2x+4y-6z = 12$ et $2x-6y+2z = -3$ équation d'une droite D.

D a pour vecteur directeur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ de coordonnées $(1, 2, -3) \wedge (-1, 3, -1) = (7, 4, 5)$ et passe par le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

d) L'ensemble $F = \{M \text{ dans } E \ / \ \|\vec{MA}\| = \|\vec{MA}\| = \|\vec{MC}\| = \|\vec{MD}\|\}$ est l'intersection des plans médiateurs de A et B, de B et C, de C et D. Si M est un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère, alors M est dans F si et seulement si :

$$2x+4y-6z = 12 \text{ et } 2x-6y+2z = -3 \text{ et } 2y-z = -1/2$$

Le système est de Cramer, F est réduit à un point Ω de coordonnées 1/6 (31, -19, -35). Ce point est le centre de la sphère circonscrite aux quatre points ABCD. Le rayon de la sphère est $\|\vec{\Omega A}\|$.

Exercice 2

a) G est le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, -1) il est donc unique.

b) Si M est un point de E, $f(M) = 2\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 - \|\vec{MC}\|^2 = 2\|\vec{MG}+\vec{GA}\|^2 + \|\vec{MG}+\vec{GB}\|^2 - \|\vec{MG}+\vec{GC}\|^2$.

En développant, on obtient $f(M) = f(G) + 2\|\vec{MG}\|^2$ et par conséquent f admet un minimum absolu au point G.

En effet si $M \neq G$, $\|\vec{MG}\| \neq 0$ et $f(M) > f(G)$ et d'autre part, si $f(M) = f(G)$ alors $\|\vec{MG}\| = 0$ et M = G.

c)Les coordonnées de G sont 1/2(2-1+3, 2+2+4) = (2, 4).

$f(G) = 2\|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GB}\|^2 - \|\vec{GC}\|^2 = 2(1+9)+(9+4)-(25+64) = -56.$

Exercice 3

Puisque $\vec{AB} = \vec{DC}$, on a en utilisant la relation de Chasles, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{DC} + \vec{BD} = \vec{BC}$.

$\|\vec{AC}\|^2 = (\vec{AB}+\vec{BC} / \vec{AB}+\vec{BC}) = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2(\vec{AB} / \vec{BC})$;

$\|\vec{BD}\|^2 = (\vec{BA}+\vec{AD}/\vec{BA}+\vec{AD}) = \|\vec{AB}\|^2+\|\vec{DA}\|^2+2(\vec{AB}/\vec{DA})$.
On additionne les deux relations et on obtient :
$\|\vec{AC}\|^2+\|\vec{BD}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2+\|\vec{BC}\|^2+\|\vec{CD}\|^2+\|\vec{DA}\|^2 +2(\vec{AB}/\vec{BC}+\vec{DA})$.
Ainsi, $\|\vec{AB}\|^2+\|\vec{BC}\|^2+\|\vec{CD}\|^2+\|\vec{DA}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2+\|\vec{BD}\|^2$.

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice 4

a) La relation indique que I est le barycentre de (A, 2), (B, 1) et que $\vec{IA} = \frac{1}{3}\vec{BA}$.
b) Si M est un point de (D), $f(M) = 2\|\vec{MI}+\vec{IA}\|^2 + \|\vec{MI}+\vec{IB}\|^2 = 3\|\vec{MI}\|^2 + f(I)$. De plus $f(I) = 2\|\vec{IA}\|^2 + \|\vec{IB}\|^2 = 2/9\|\vec{BA}\|^2 + 4/9\|\vec{BA}\|^2 = 2/3\|\vec{BA}\|^2$, ainsi :

$$f(M) = 3\|\vec{MI}\|^2 + 2/3\|\vec{AB}\|^2.$$

c) Si H est le projeté orthogonal de I sur (D) et si M est sur (D), $\|\vec{MI}\|^2 = \|\vec{MH}\|^2 + \|\vec{HI}\|^2$, puisque les vecteurs sont orthogonaux.
Par conséquent, $f(M) = 3\|\vec{MH}\|^2+3\|\vec{HI}\|^2+ 2/3\|\vec{AB}\|^2$, et $f(M) \geq f(H)$ avec l'égalité si et seulement si M = H.
d)Il s'agit de trouver les coordonnées du point H, I est de coordonnées (4/3, -1, 0).
Une équation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

On cherche λ tel que $(\vec{HI}/\vec{u}) = 0$, soit $2(1/3-2\lambda)-(1+\lambda)-(\lambda+1)=0$ et $\lambda= -2/9$. Ainsi H est de coordonnées 1/9(5, -16, 7).

Exercice 5

Une équation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0+\lambda \end{cases}$$

Si M'(x', y' ,z') est le symétrique du point M, alors $(\vec{MM'}/\vec{u}) = 0$ et le milieu de M et M' est sur (D). On a les relations : $x+x'=2(1+2\lambda)$, $y+y'=2(1-\lambda)$, $z+z'=2\lambda$ et $2(x'-x)-(y'-y)+(z'-z) = 0$.
Ainsi $-4x+2y-2z +4(1+2\lambda)-2(1-\lambda)+2\lambda = 0$ et $12\lambda = 4x-2y+2z-2$.
Par conséquent : $x'= 1/3(x-2y+2z+4)$; $y'= 1/3(-2x-2y-z+7)$; $z'= 1/3(2x-y-2z-1)$ et la matrice représentant la symétrie dans le repère est :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 6

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1, -2, 3) est un vecteur normal au plan (P) et par conséquent, une équation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 0 + 3\lambda \end{cases}$$

Si H est la projection orthogonale de A sur (P), alors H est sur (D) et les coordonnées de H sont (1+λ, -2-2λ, 3λ), avec (1+λ)-2(-2-2λ)+ 9λ=2 soit λ=-3/14.

Ainsi, les coordonnées de H sont 1/14 (11, -22, -9) et $\|\vec{AH}\| = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

Exercice 7

a)Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u}$' est un vecteur normal au plan (P), ses coordonnées dans le repère sont (-1, 7, 5) . Une équation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 0 + 7\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

Si H désigne la projection de A sur (P), H(-1-λ, 7λ, 1+5λ) et $\vec{BH} \in \vec{P}$.

Ainsi, $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ 7\lambda - 1 & -2 & 1 \\ 5\lambda & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ et $\lambda = 1/15$ et $\|\vec{AH}\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Les coordonnées du vecteur $\vec{BC}$ sont (-3, 2, 1)et ce vecteur est normal au plan .
L' équation de (P) est -3x+2y+z = a = -8 puisque A est dans le plan.

Exercice 8

On observe que A n'est pas dans (P).
a) Le vecteur normal au plan est un vecteur directeur de (D) et par conséquent une équation paramétrique de la droite est:

$$\begin{cases} x = 4 + 6\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 0 - 5\lambda \end{cases}$$

b) Si H est dans (D)∩(P), alors H(4+6λ, -2-3λ, -5λ) et 6(4+6λ)-3(-2-3λ)+25λ = 6 et λ = -12/35.
Ainsi les coordonnées de H sont 1/35(68, -34, 12).

c)Si A' est le symétrique orthogonal de A, alors $\vec{AA'} = 2\,\vec{AH}$ et les coordonnées de A' sont 1/35(-4, 2, 120).

Exercice 9

a) Si M est un point de D et si M' est un point de D' alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}$.

Ainsi, $(\overrightarrow{MM'} / \vec{w}) = (\overrightarrow{HH'} / \vec{w})$ et comme les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont colinéaires, on peut appliquer l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On obtient $\| \overrightarrow{HH'} \| \|\vec{w}\| = \left|(\overrightarrow{HH'} / \vec{w})\right|$ et la relation :

$$\| \overrightarrow{HH'} \| = d(D,D') = \frac{\left|(\overrightarrow{MM'} / \vec{w})\right|}{\|\vec{w}\|}.$$

b)Une direction de la droite (D) est obtenue en faisant le produit vectoriel des vecteurs normaux de chaque plans, soit un vecteur de coordonnées (-1, 2, 1). De même une direction de (D') est le vecteur de coordonnées (0, -10, 2). Par conséquent, en faisant un nouveau produit vectoriel, on obtient une direction de (Δ) soit le vecteur de coordonnées (7, 1, 5).

La perpendiculaire commune appartient au faisceau de plan passant par (D) et son équation est a(x+z-2)+b(x+y-z-1) = 0 = (a+b)x+by+(a-b)z-(2a+b).

Par conséquent, il faut que 7(a+b)+b+5(a-b)=0. Si on choisit a=1 et b =-4, on obtient le plan d'équation 3x+4y-5z-2 = 0, équation du plan contenant (D) et (Δ).

La perpendiculaire commune appartient aussi au faisceau de plan passant par (D') et son équation est a(2x-1)+b(y+5z) = 0 = (2a)x+by+(5b)z-a.

Par conséquent, il faut que14a+b+25b =0. Si on choisit a=13 et b=-7, on obtient le plan d'équation 26x-7y-35z-13 = 0, équation du plan contenant (D') et (Δ).

L'équation de (Δ) est donc :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z - 2 = 0 \\ 26x - 7y - 35z - 13 = 0 \end{cases}$$

Pour calculer la distance, il faut trouver un point sur chaque droite et appliquer les résultats de a).

Le point M(0, 3, 2) est dans (D) et M'(1/2, 0, 0) est dans (D') et par conséquent, comme $\vec{w}\,(7, 1, 5)$, on obtient :

$$d(D,D') = \frac{19}{10\sqrt{3}}.$$

Exercice 10

I-a) si i ≠j l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$(\overrightarrow{OA}_i / \overrightarrow{OA}_j)^2 \leq \|\overrightarrow{OA}_i\|^2 \|\overrightarrow{OA}_j\|^2$$

et par conséquent $|h| \leq 1$.

D'autre part il n'y a égalité que si les vecteurs sont colinéaires. Si $\overrightarrow{OA}_i = \lambda \overrightarrow{OA}_j$, alors comme les vecteurs sont de norme un, $\lambda = \pm 1$.

Si $\lambda = h = 1$, les points A_i et A_j sont confondus ce qui est exclu par hypothèse et par conséquent h≠-1.

b) Si n > 1 , la famille a au moins trois points, A_1, A_2, A_3 . Si h =-1, on a $\overrightarrow{OA}_1 = -\overrightarrow{OA}_2$ et $\overrightarrow{OA}_1 = -\overrightarrow{OA}_3$ d'où l'on déduit que $A_2 = A_3$ ce qui est impossible donc h ≠ -1.

c) On a n+1 points dans un espace de dimension n et par conséquent, pour montrer que la famille est un repère, il suffit de montrer qu'elle est affinement libre.
Soit une famille de scalaires $a_1, a_2, ..., a_n$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_{n+1}A_i} = 0 \text{, alors } -(\sum_{i=1}^{i=n} a_i)\overrightarrow{OA_{n+1}} + \sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{OA_i} = 0.$$

Si $j \neq n+1$, on fait le produit scalaire du vecteur ci-dessus par le vecteur $.\overrightarrow{OA_j}$ et on obtient : $(\sum_{i=1}^{i=n} a_i)h = (\sum_{i=1}^{i=n} a_i)h - a_j h + a_j$ et ainsi $(1-h)a_j = 0$ et $a_j = 0$.
La famille est affinement libre, c'est un repère affine.
d) O est barycentre des points du repère par conséquent il existe une famille de scalaires $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ de somme 1, telle que :

$$\overrightarrow{OA_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iA_{n+1}}$$

Si $j \neq n+1$, on fait le produit scalaire du vecteur ci-dessus par le vecteur $\overrightarrow{OA_j}$ et on obtient : $h = -(\sum_{i=1}^{n} a_i)h + a_j h - a_j + (\sum_{i=1}^{n} a_i)h$ et par conséquent $a_j = h/(h-1)$.
Il reste le cas $j = n+1$, on fait le produit scalaire du vecteur ci-dessus par le vecteur $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ et on obtient $1 = -h(1-a_{n+1}) + (1-a_{n+1})$ soit $a_{n+1} = h/(h-1)$.
Ainsi tous les coefficients sont égaux et O est l'isobarycentre.
e) La somme des coefficients est 1 donc $(n+1)h/(h-1)=1$ et $h = -1/n$
f) $\|\overrightarrow{A_iA_j}\|^2 = \|\overrightarrow{OA_i}\|^2 + \|\overrightarrow{OA_i}\|^2 - 2(\overrightarrow{OA_i} / \overrightarrow{OA_j}) = 2-2h = 2+2/n$.

II-a) si E est le plan euclidien, alors d'après c) les points constituent un repère affine et sont non alignés. Le point f) montre que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ et le triangle est équilatéral. De plus, d'après f) cette norme est $\sqrt{3}$ et est une condition nécessaire pour que les points d'un triangle équilatéral vérifie la condition (P) est que les côtés soient de longueur $\sqrt{3}$. Montrons que cette condition est suffisante.
Si O est l'isobarycentre du triangle, alors on a la relation sur les écarts angulaires, $A\widehat{O}B = B\widehat{O}C = C\widehat{O}B = 2\pi/3$. D'autre part, $\|\overrightarrow{OA}\| = 2/3\ \|\overrightarrow{AB}\|\ \sqrt{3}/2 = 1$, puisque O est l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit.
Ainsi, $(\overrightarrow{OA} / \overrightarrow{OB}) = \cos(2\pi/3) = -1/2 = (\overrightarrow{OA} / \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC} / \overrightarrow{OB})$ et $\|\overrightarrow{OA}\|^2 = 1 = \|\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\overrightarrow{OC}\|^2$.
b) Si on choisit trois points quelconques alors d'après e) et f) ils sont non alignés et forment un triangle équilatéral. D'autre part, $h = -1/3$ et par conséquent, $(\overrightarrow{OA} / \overrightarrow{OB}) = -1/3$ et $A\widehat{O}B = \operatorname{Arccos}(-1/3)$.
$(\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} / \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = 1-h-h+h = 4/3$; $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1+1-2h = 8/3$.
Ainsi, $B\widehat{A}C = \operatorname{Arccos}(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}) = \operatorname{Arccos}(1/2) = \pi/3$, résultat que l'on attendait puisque le triangle est équilatéral.
