

Chapitre VII- LE GROUPE DES ISOMETRIES

Les isométries sont dans les espaces affines euclidiens, le pendant des automorphismes orthogonaux dans les espaces euclidiens.

1) Définitions et propriétés

Si E et E' sont deux espaces affines euclidiens, une isométrie est une application f de E dans E' qui conserve la distance c'est à dire qui est telle que:

Si x et y sont deux points quelconque de E alors :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) = \|\vec{xy}\| = \|\vec{f(x)f(y)}\|$$

Ainsi f est injective et par conséquent bijective sur son image. Par suite et quitte à poser $E' = \text{Im} f$, on supposera que f est surjective.

On peut noter que dans cette définition f n'est pas a priori affine mais on va démontrer que si f est une isométrie alors f est affine et que $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal. Ainsi, on se restreint pas la généralité en supposant que $E = E'$, ce qui sera fait à partir de maintenant.

Théorème : Si E est un espace euclidien et f une application de E dans E , alors les propositions ci-dessous sont équivalentes:

- i) Si $x, y \in E$ alors, $\|\vec{xy}\| = \|\vec{f(x)f(y)}\|$ (f est une isométrie de E)
- ii) f est une application affine et $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal

Il est clair que ii) $\Rightarrow$ i), pour démontrer l'implication réciproque, il faut montrer que f est affine et pour cela montrer que $\vec{f}$ est linéaire.

On suppose que i) est vérifiée et on choisit un point a de E . On définit alors l'application $f_a : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ qui à x dans E associe $f_a(\vec{ax}) = \vec{f(a)f(x)}$, alors:

$$* f_a(0) = f_a(\vec{aa}) = \vec{f(a)f(a)} = 0$$

$$* \text{Si } x \in E \text{ alors, } \|f_a(\vec{ax})\| = \|\vec{f(a)f(x)}\| = \|\vec{ax}\|$$

Ainsi f_a est une application qui s'annule en 0 et qui conserve la norme des vecteurs et par conséquent le produit scalaire.

Il faut donc montrer que f_a est linéaire. Pour cela on choisit deux points x, y dans E et deux scalaires α, β et on développe $\|f_a(\alpha\vec{ax} + \beta\vec{ay}) - \alpha f_a(\vec{ax}) - \beta f_a(\vec{ay})\|^2$ et en utilisant la conservation de la norme et du produit scalaire, on montre que l'expression est nulle et ainsi f_a est linéaire.

De la linéarité de f_a on déduit que f est affine et que $f_a = \vec{f}$. Par conséquent $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal.

En conclusion, les isométries de E sont les applications affines de E d'applications linéaires associées orthogonales.

Conséquences directes liées au théorème précédent:

- a) Une isométrie est une bijection affine, elle a donc les propriétés de celle-ci :
- elle conserve le parallélisme
 - elle conserve les distances
 - elle transforme une VLA en une VLA de même dimension (une droite en une droite, un plan en un plan, ...)
 - elle est déterminée par l'image de $n+1$ points affinement libres lorsque $\dim(E)=n$
 - elle conserve les écarts angulaires (angles non orientés)
 - elle conserve les angles orientés lorsque l'on se place dans un plan orienté et lorsque l'automorphisme orthogonal est de déterminant 1 (c'est une rotation vectorielle). Dans le cas des symétries, il y a changement de signe.

- b) Si $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est un repère orthonormé de E , la matrice représentant une isométrie f dans le repère est de la forme:

$$M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & & & & \\ b_2 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ b_n & & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{où } B \text{ est une matrice orthogonale et la première colonne représente l'image de l'origine } O \text{ dans le repère}$$

Réciproquement, si sur un repère orthonormé, f est représentée par une matrice de cette forme alors f est une isométrie.

- c) Parmi les principales isométries, on peut citer les translations ($B = I_n$), les symétries orthogonales (B est une matrice orthogonale de symétrie).

2) Le groupe des isométries

E étant un espace affine euclidien, on note $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E . $Is(E)$ est un sous groupe du groupe affine $GA(E)$ ensemble des bijections affines de E .

Les isométries dont l'application linéaire associée est de déterminant +1 (les rotations) sont appelées des **déplacements**, celles dont le déterminant est -1 sont des **antidéplacements**.

On note $Is^+(E)$ l'ensemble des déplacements et $Is^-(E)$ l'ensemble des anti- déplacements.

Ainsi par exemple, les translations sont des déplacements, les symétries orthogonales par rapport à une VLA Y sont des déplacements (resp . antidéplacements) si $\text{codim}(Y)$ est paire (resp. impaire)

Si $\dim E = n$ et $\dim Y = n-1$ une symétrie orthogonale par rapport à une VLA Y est une réflexion (Y est un hyperplan affine) si $\dim Y = n-2$, c'est un retournement.

Théorème : $Is^+(E)$ est un sous groupe distingué de $Is(E)$ d'indice 2, et si f est un antidéplacement alors $Is^-(E) = f \circ Is^+(E)$

On considère l'application L qui à une isométrie f associe le déterminant de l'application linéaire $\tilde{f}$.

L'application $L : Is(E) \rightarrow \{-1, 1\}$ est le produit de deux morphismes de groupes donc est un morphisme de groupes. De plus, L est surjective et par conséquent, $\text{Ker} L = Is^+(E)$ est un sous groupe distingué de $Is(E)$.

Comme il y a deux classes d'équivalences , il est d'indice 2 et si f est un antidéplacement alors $Is^-(E) = f \circ Is^+(E)$

3) Etude des générateurs de $Is(E)$.

On sait que si f est une application affine et si O est un point de E , il existe une translation T et une application affine g admettant O comme point fixe telles que $f = T \circ g$. Si O est dans l'image de f , il existe une translation T' et une application affine g' admettant O comme point fixe telles que $f = g' \circ T'$.

En général, on ne peut pas en dire plus et les applications ne commutent pas. Par contre, dans le cas des isométries, le théorème suivant donne un résultat plus intéressant :

Théorème: Si f est une isométrie de E , f est le produit commutatif d'une isométrie g ayant un point fixe et d'une translation.

Plus précisément, il existe $g \in Is(E)$ ayant un point fixe et $\vec{u} \in \text{Ker}(\tilde{f} - \text{Id})$ uniques tels que $f = g \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ g$.

Tout d'abord, on a le résultat suivant, $\vec{E} = \text{Ker}(\tilde{f} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\tilde{f} - \text{Id})$. En effet pour des raisons de dimension il suffit de montrer que les deux sous espaces sont orthogonaux.

Si $\vec{u}$ est dans $\text{Ker}(\tilde{f} - \text{Id})$ et $\vec{v}$ dans $\text{Im}(\tilde{f} - \text{Id})$ alors, $\tilde{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ et il existe $\vec{w}$ dans $\vec{E}$ tel que $\vec{v} = \tilde{f}(\vec{w})$. Ainsi $(\vec{u} / \vec{v}) = (\tilde{f}(\vec{u}) / \tilde{f}(\vec{w})) - (\vec{u} / \vec{w}) = 0$.

La démonstration se fait alors en trois points :

- Existence de $\vec{u}$ et de g .

Soit a un point de E , alors d'après le préliminaire, $\vec{af}(a) = \vec{t} + \vec{f}(\vec{t}') - \vec{t}'$ avec $\vec{t}$ dans $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

Si on considère le point $O = a - \vec{t}'$, alors $f(O) = f(a) - \vec{f}(\vec{t}') = O + \vec{t}$. Si on pose $\vec{u} = \vec{t}$ alors, $f = T_{\vec{u}} \circ g$, $g = T_{\vec{u}}^{-1} \circ f$ et g admet O comme point fixe.

- Unicité.

Supposons que $f = T_{\vec{u}} \circ g = T_{\vec{v}} \circ g'$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$, O point fixe de g et O' point fixe de g' .

On en déduit que $f(O) = O + \vec{u}$ et $f(O') = O' + \vec{v}$, et ainsi, $\vec{f(O)f(O')} = \vec{OO'} + \vec{u} - \vec{v}$ et le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est dans $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \cap \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})$, et par conséquent, $\vec{u} = \vec{v}$ et $g = g'$.

-Commutativité.

Le vecteur $\vec{u}$ est dans $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ et par conséquent, si m est un point de E , $f(m + \vec{u}) = f(m) + \vec{f}(\vec{u}) = f(m) + \vec{u}$.

Ainsi f et $T_{\vec{u}}$ commutent et g et $T_{\vec{u}}$ commutent.

Noter que si $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ est réduit au vecteur nul, f a toujours un unique point fixe. (ceci est lié à l'unicité de la décomposition)

Théorème : Si f est une isométrie de E , f est le produit de p réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) avec $p \leq n+1$.

Si $\dim(E) = n$ et si $s = \dim \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ alors:

Si f a un point fixe, $p = n-s$, si f n'a pas de point fixe $p = n-s+2$, et dans les deux cas le nombre p est minimum.

Ainsi, les réflexions sont des générateurs de $\text{Is}(E)$

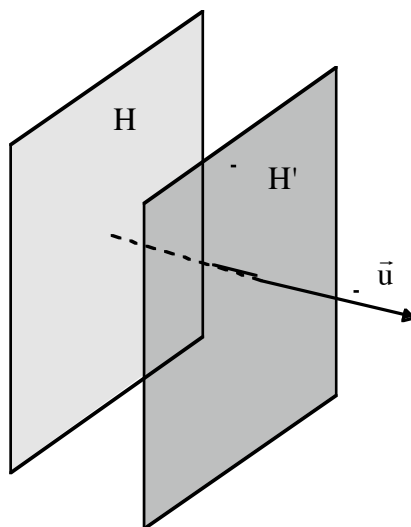
Si f a un point fixe O , on peut vectorialiser E en O et par conséquent considérer E comme espace euclidien de dimension n . Ainsi f est considérée comme un automorphisme orthogonal et on utilise les résultats que l'on connaît dans le cadre euclidien.

Si f n'a pas de point fixe, on utilise le théorème précédent et par conséquent f est le produit d'une translation avec une isométrie ayant un point fixe. Pour démontrer la propriété il suffit par conséquent de montrer qu'une translation est le produit de deux réflexions.

Soit donc $T_{\vec{u}}$ une translation, on choisit un point a de E et on considère l'hyperplan H passant par a et de direction orthogonale au vecteur $\vec{u}$ ($\vec{H} = \text{Vect}\{\vec{u}\}^\perp$).

L'hyperplan vectoriel $\vec{H}' = a + \vec{u}/2 + \vec{H}$ est parallèle à H et si on note σ_H et $\sigma_{H'}$ les réflexions par rapport à ces hyperplans, alors on vérifie facilement que $T_{\vec{u}} = \sigma_{H'} \circ \sigma_H$.

Ainsi f est le produit de $n-s+2$ réflexions.



4) Le groupe des isométries en dimension 2 ou 3.

A) Les isométries dans le plan affine euclidien.

Outre les translations, nous trouvons :

* $f \in \text{Is}^+(E)$ et n'est pas une translation alors f a un point fixe A. * $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est une rotation de centre A et d'angle θ	
--	--

* $f \in \text{Is}^-(E)$ alors il existe une droite D et un vecteur $\vec{u}$ directeur de D. * $1, -1$ sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est le produit de la symétrie autour de D et de la translation de vecteur $\vec{u}$.	
---	--

Si E est le plan affine euclidien, $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct et f une isométrie qui n'est pas une translation, alors on a l'alternative :

-f est un déplacement :

Dans ce cas f est une rotation et , $M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos \theta & -\sin \theta \\ b & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ avec $\cos \theta \neq 1$.

L'angle de la rotation est $\text{Arcos}(\cos \theta) \bmod [2\pi]$ si $\sin \theta \geq 0$, et $2\pi - \text{Arcos}(\cos \theta) \bmod [2\pi]$ si $\sin \theta < 0$.

Le centre de la rotation est le point A de coordonnées $x = 1/2 (a - b/\tan(\theta/2))$ et $y = 1/2 (b + a/\tan(\theta/2))$.

-f est un antidéplacement :

Dans ce cas f est une symétrie composée commutativement avec une translation.

$$M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos \theta & \sin \theta \\ b & \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \text{ avec } \cos \theta \neq 1.$$

L'équation de la droite axe de symétrie est :

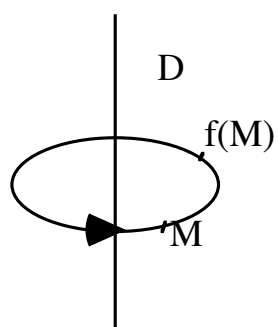
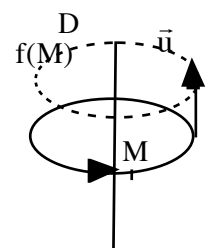
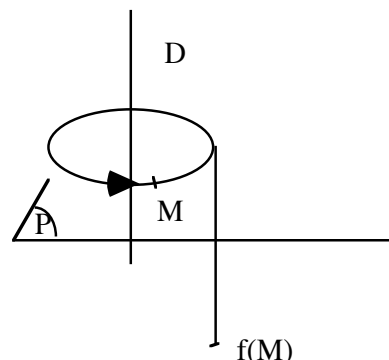
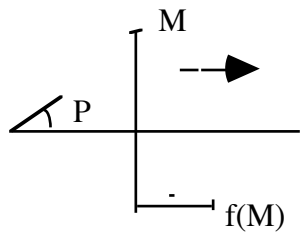
$$a \sin(\theta/2) - b \cos(\theta/2) - 2 \sin(\theta/2)x + 2 \cos(\theta/2)y = 0.$$

Noter que le point $(a/2, b/2)$ est sur la droite.

Le vecteur de la translation a pour coordonnées $a \cos(\theta/2) + b \sin(\theta/2)$ $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

B) Les isométries de l'espace (en dimension 3):

Outre les translations, nous trouvons :

* $f \in \text{Is}^+(E)$ et f a un point fixe A, alors f a une droite de points fixes D. * $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est une rotation d'axe D et d'angle θ	
* $f \in \text{Is}^+(E)$ et f n'a pas de point fixe * $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est le produit d'une rotation d'axe D et d'angle θ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ porté par l'axe, f est un vissage.	
* $f \in \text{Is}^-(E)$ et f a un point fixe A, alors il existe une droite D et un plan P orthogonaux contenant A. * $-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est le produit d'une rotation d'axe D et d'angle θ et d'une symétrie orthogonale autour de P	
* $f \in \text{Is}^-(E)$ et f n'a pas de point fixe, il existe un plan P et un vecteur $\vec{u}$ dans $\vec{P}$. * $-1, 1$(double) sont valeurs propres de $\vec{f}$. * f est le produit de la symétrie orthogonale autour de P et d'une translation de vecteur $\vec{u}$.	

Si E est l'espace affine euclidien, et si f est une isométrie distincte d'une translation alors, on distingue deux cas :

1) $\vec{f}$ n'est pas une symétrie vectorielle (la matrice de $\vec{f}$ sur une base orthonormée n'est pas symétrique et $\vec{f}$ est une rotation).

Dans ce cas, $\vec{f}$ admet une seule valeur propre réelle et le sous espace propre associé est de dimension 1. On choisit un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de façon que

$\vec{i}$ soit une base de cette droite vectorielle propre et que $(\vec{j}, \vec{k})$ soit une base directe du plan vectoriel orthogonal à la droite; on notera que le choix de $\vec{i}$ détermine l'orientation du plan vectoriel, alors :

-f est un déplacement :

$$\text{Dans ce cas } f \text{ on a, } M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ c & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \cos\theta \neq 1, \text{ on recherche les}$$

points fixes de f et on montre que si $a = 0$ il existe une droite de points fixes, si $a \neq 0$ il n'y a pas de point fixe et ainsi :

* Si $a = 0$, f est une rotation d'axe la droite de points fixes, l'angle de la rotation est $\text{Arcos}(\cos\theta) \bmod [2\pi]$ si $\sin\theta \geq 0$, et $2\pi - \text{Arcos}(\cos\theta) \bmod [2\pi]$ si $\sin\theta < 0$.

* Si $a \neq 0$, f est un vissage, f est le produit commutatif d'une rotation d'axe une droite globalement invariante de direction $\vec{i}$ et d'angle identique au cas précédent, avec une translation de vecteur colinéaire à $\vec{i}$.

-f est un antidéplacement :

$$\text{Dans ce cas } f \text{ on a, } M_R(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ c & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \cos\theta \neq 1, \text{ on recherche les}$$

points fixes de f et on montre qu'il y a toujours un seul point fixe A .

f est le produit commutatif d'une rotation d'axe la droite passant par A et de direction $\vec{i}$ et d'angle identique au cas précédents, avec une symétrie orthogonale au plan passant par A et orthogonal à l'axe.

2) $\vec{f}$ est une symétrie vectorielle (la matrice de $\vec{f}$ sur une base orthonormée est symétrique).

Dans ce cas, $\vec{f}$ est diagonalisable et on choisit un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé de vecteurs propres.

-f est un déplacement

Dans ce cas, 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et le sous espace propre est une droite vectorielle $\vec{D}$, -1 est valeur propre et le sous espace propre est un plan vectoriel orthogonal au précédent (la trace de $\vec{f}$ est -1).

* Si f n'a pas de point fixe, f est le produit commutatif d'une symétrie orthogonale d'axe de direction $\vec{D}$ avec une translation de vecteur porté par l'axe.

* Si f a un point fixe A , f est une d'une symétrie orthogonale d'axe de direction $\vec{D}$ passant par A .

-f est un antidéplacement

Si la trace de $\vec{f}$ est -3 , -1 est la seule valeur propre, si la trace de $\vec{f}$ est 1 , -1 est valeur propre et le sous espace propre associé est une droite vectorielle $\vec{D}$.

* Si trace de $\vec{f}$ est -3 , f a un unique point fixe A , f est une symétrie par rapport au point A .

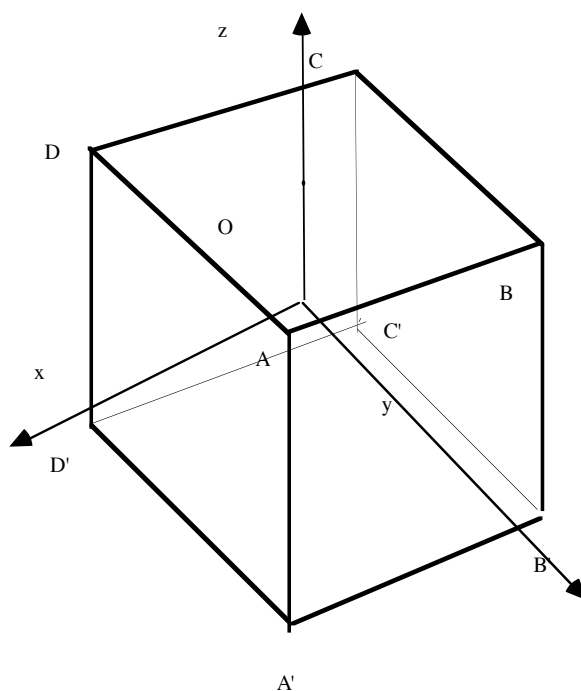
* Si trace de $\vec{f}$ est 1 , alors si f a un point fixe A , f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par A et orthogonal à $\vec{D}$.

Si f n'a pas de point fixe, f est le produit commutatif d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan orthogonal à $\vec{D}$ avec une translation de vecteur porté par ce plan.

Exercices du chapitre VII

Exercice 1

On note E_3 l'espace affine euclidien de dimension 3, $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien orthonormé direct et on considère le cube ci-dessous dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.



Ainsi, A est le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, B $(-1, 1, 1)$, C $(-1, -1, 1)$ etc...

1) Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AC). On note σ_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC), écrire la matrice représentant σ_1 dans le repère R.

2) On note σ_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BD') et σ_3 la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABCD). Ecrire les matrices représentant σ_2 et σ_3 dans le repère R.

3) Donner la matrice représentant $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et en déduire sa description géométrique.

4) Donner l'équation de la perpendiculaire commune des droites (AC) et (BD') et retrouver les résultats de la question précédente par des arguments géométriques.

5) Donner la matrice représentant $\sigma_2 \circ \sigma_3$ et en déduire sa description géométrique.

En déduire la forme géométrique de $\sigma_3 \circ \sigma_2$.

Exercice 2

Soit $(X, \vec{X})$ un espace affine euclidien de dimension 3, et soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien orthonormé direct de X .

partiel

On considère deux droites affines D_1 et D_2 définies par leurs équations cartésiennes dans le repère R .

$$D_1 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

- Donner une équation paramétrique de chaque droite.
- Ecrire les matrices représentant la symétrie orthogonale SD_1 (resp SD_2) autour de D_1 (resp. D_2) dans le repère R .
- On considère l'isométrie $u = SD_1 \circ SD_2$. Montrer que :
 - u est un déplacement et n'a pas de points fixes.
 - il existe une droite Δ telle que $u(\Delta) = \Delta$ (Δ est globalement invariante par u)
 - u est un vissage dont on précisera les caractéristiques.
- Que représente $v = SD_2 \circ SD_1$?

partie 2

Plus généralement, on considère deux droites D'_1 et D'_2 de X .

- On suppose que D'_1 et D'_2 sont non parallèles et non concourantes.
 - Montrer qu'il existe une unique droite Δ' perpendiculaire à D'_1 et D'_2 .
 - Montrer que $SD'_{D'_1} \circ SD'_{D'_2}$ est un vissage dont on précisera les caractéristiques (on choisira un repère convenable).
 - Que peut-on dire de $SD'_{D'_2} \circ SD'_{D'_1}$?
- On suppose que D'_1 et D'_2 sont non parallèles et concourantes en un point M de X . Que peut-on dire dans ce cas de $SD'_{D'_1} \circ SD'_{D'_2}$ et de $SD'_{D'_2} \circ SD'_{D'_1}$?
- On suppose maintenant que les droites sont parallèles et non concourantes, que peut-on dire dans ce cas de $SD'_{D'_1} \circ SD'_{D'_2}$ et de $SD'_{D'_2} \circ SD'_{D'_1}$?

partie 3

Réciproquement, on se propose de montrer que si f est un vissage, alors f est le produit de deux symétries axiales.

a) Soit f un déplacement qui n'a pas de point fixe et dont l'application linéaire associée est une rotation.

Montrer qu'il existe un repère sur lequel f est représenté par une matrice de la forme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{b} & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ \mathbf{c} & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{a} \neq 0$$

b) Montrer que f est le produit de deux symétries axiales dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 3

Soient X un espace affine euclidien, et F une partie non vide de X . On note $Is(F)$ l'ensemble des isométries qui laissent F invariante :

$f \in Is(F)$ si et seulement si $(f \in Is(X) \text{ et } f(F) = F)$.

On note :

$$Is^+(F) = Is(F) \cap Is^+(X),$$

$$Is^-(F) = Is(F) - Is^+(X).$$

A)

1) Montrer que $Is(F)$ et $Is^+(F)$ sont des sous-groupes de $(Is(X), \circ)$.

2) Si $Is^-(F)$ est non vide, pour tout élément g de $Is^-(F)$ montrer que :

$$Is^-(F) = g \circ Is^+(F) = \{g \circ f, f \in Is^+(F)\}.$$

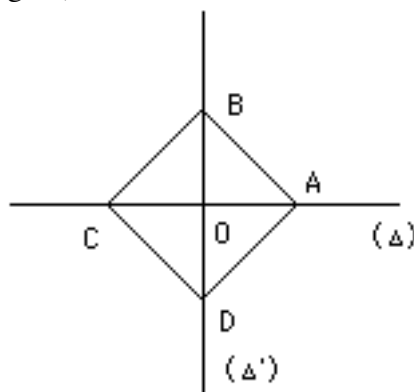
En déduire que si $Is(F)$ est fini alors :

$$1/2 \text{Card}(Is(F)) = \text{Card}(Is^+(F)) = \text{Card}(Is^-(F)).$$

B)

On se propose de déterminer $Is(F)$ lorsque F est la réunion de deux droites distinctes Δ et Δ' d'un espace affine euclidien X de dimension 2.

1) On suppose que Δ et Δ' sont orthogonales et sécantes en O . Soit $F' = \{A, B, C, D\}$ un carré de centre O (voir figure) :



a) Vérifier que $Is(F) = Is(F')$ et que tout élément de $Is(F')$ admet un point invariant.

b) Déterminer les éléments de $Is^+(F')$. En déduire $Is(F)$.

2) On suppose que Δ et Δ' sont parallèles. Soit D la droite équidistante de Δ et Δ' .

a) Soit O un point de D . Rechercher les éléments de $Is(F)$ qui laissent O invariant. On note $Is_O(F)$ cet ensemble.

b) Vérifier que $f \in Is(F)$ si et seulement si il existe un vecteur $\vec{u} \in \vec{\Delta}$, et une application $g \in Is_O(F)$ tels que $f = t_{\vec{u}} \circ g$.

En déduire $Is(F)$.

Exercice 4

On se place dans l'espace, E est un espace affine euclidien de dimension 3. On considère trois plans distincts P_1, P_2, P_3 et on note σ_i la symétrie orthogonale par rapport à P_i lorsque $i=1,2,3$.

Soit $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, on désire étudier dans quelles conditions on a $f^2 = Id$.

1) Montrer que si $f^2 = Id$ alors f est une symétrie par rapport à un plan ou par rapport à un point.

2) Si P_1, P_2, P_3 sont trois plans parallèles, que peut-on dire de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et de f ?

3) Si P_1, P_2, P_3 contiennent une même droite D , que peut-on dire dans ce cas de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et de f ?

4) Imaginez une situation dans laquelle f est la symétrie par rapport à un point A .

5) On suppose $f^2 = Id$ et P_1 parallèle à P_2 montrer qu'alors P_3 est parallèle à P_2 .

6) On suppose $f^2 = Id$ et que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite D .

Montrer que l'on a l'alternative:

- P_3 contient D .
- P_3 est orthogonal à D et P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

Note : Il est conseillé de raisonner à partir de repères bien choisis.

Exercice 5

On suppose que X est le plan affine euclidien (dimension 2). On dit que deux triangles sont égaux si il existe une isométrie qui transforme l'un en l'autre. Il est clair que cette relation est une relation d'équivalence.

1) Cas d'égalité des triangles.

Soient $A B C$ et $A' B' C'$ deux triangles non aplatis (ils constituent chacun un repère affine). On notera $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ l'écart angulaire (non orienté) correspondant au point A , et des notations analogues pour les autres points.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

a) Il existe une isométrie f telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

- b) $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$; $\|\vec{AC}\| = \|\vec{A'C'}\|$; $\|\vec{BC}\| = \|\vec{B'C'}\|$ (3° cas)
 c) $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$; $\|\vec{AC}\| = \|\vec{A'C'}\|$; $\hat{A} = \hat{A'}$. (2° cas)
 d) $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$; $\hat{A} = \hat{A'}$; $\hat{B} = \hat{B'}$. (1° cas) .

2) Soient A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$ et $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$. Donner les éléments géométriques du déplacement f et de l'antidépacement g tels que :

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \quad \begin{cases} g(A) = A' \\ g(B) = B' \end{cases}$$

3) On considère deux droites concourantes dans le plan affine euclidien . Quel est l'ensemble des points équidistants à ces deux droites ?

Exercice 6

E est un espace affine euclidien de dimension 2, on suppose que $\vec{E} = \mathbb{E}^2$ muni de la structure euclidienne canonique.

Soient trois points distincts de E notés A, B, C tels que $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\|$ (ABC est un triangle équilatéral).

- a) Montrer que A, B, C constitue un repère affine R de E .
 b) On dira qu'une application affine f de E dans E conserve le triangle ABC si et seulement si $\{A, B, C\} = \{f(A), f(B), f(C)\}$.

Montrer que si f conserve le triangle ABC alors f est une isométrie.

On note H_{ABC} l'ensemble des isométries qui conservent le triangle ABC . Montrer que H_{ABC} a 6 éléments. Construire la table de multiplication de H_{ABC} pour la loi $\circ$ et montrer que c'est un sous groupe non commutatif.

Est-ce que H_{ABC} est un sous groupe distingué de l'ensemble des isométries de E ?

- c) Ecrire les 6 matrices représentant les éléments de H_{ABC} dans le repère R et préciser géométriquement ce qu'elles représentent.

- d) Soient A', B', C' trois points non alignés de E . Montrer qu'il existe une application affine bijective unique ϕ transformant respectivement les points A', B', C' en les points A, B, C .

Montrer que l'ensemble des applications affines qui conservent les points A', B', C' est obtenu à partir de H_{ABC} et de ϕ .

En déduire le nombre d'éléments de cet ensemble. Pouvait-on démontrer directement ce résultat ?

e) *Application :*

Le tableau ci-dessous donne les coordonnées des points A', B', C' dans le repère R :

	A'	B'	C'
A	0,5	0,1	0,3
B	0,5	0,9	0,3

C	0	0	0,4
---	---	---	-----

Que peut-on dire du triangle $A'B'C'$? Donner les matrices représentant les applications affines conservant les points $A'B'C'$ dans le repère R .

On considère la matrice M matrice inverse de $\begin{bmatrix} 0,4 & -0,4/\sqrt{3} \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}$ et on note f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}^2$ et représentée par la matrice tMM sur la base orthonormée $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ et $\vec{e}_2$. Montrer que f définit une nouvelle structure euclidienne sur $\mathbb{E}^2$. (on notera $(./.)_f$ le nouveau produit scalaire)

Montrer que dans cette nouvelle structure $A'B'C'$ est un triangle équilatéral. Que peut-on en conclure ?

Solutions des exercices du chapitre VII

Exercice 1

1) Les coordonnées de $\vec{u} = \vec{AC}$ dans R sont $(-2, -2, 0)$ et par conséquent, une équation paramétrique de la droite (AC) dans R est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

une équation cartésienne de la droite (AC) dans R est : $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$.

Si $M(x, y, z)$ est un point et si $M'(x', y', z')$ est l'image de M par σ_1 alors :

$(\vec{MM'} / \vec{u}) = 0$ et le milieu de M et M' est sur la droite (AC).

Ainsi, $(x'-x)+(y'-y)=0$, $x+x' = 2(1+\lambda)$, $y+y' = 2(1+\lambda)$ et $z+z' = 2$. On obtient :

$$\begin{cases} x' = 2 + x + y - 2 - x = y \\ y' = 2 + x + y - 2 - y = x \\ z' = 2 - z \end{cases} ; M_R(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2) * Etude de σ_2 .

$D'(1, -1, -1)$ et $BD'(2, -2, -2)$ et en faisant un calcul analogue au cas précédent, on obtient :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases} ; M_R(\sigma_2) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

* Etude de σ_3 .

$\vec{MM'}$ est colinéaire à $\vec{k}$ et le milieu de M et M' est dans le plan (ABCD) d'équation $z=1$. Ainsi :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 2 - z \end{cases} ; M_R(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) La matrice $M_R(\sigma_1 \circ \sigma_2) = M_R(\sigma_1) M_R(\sigma_2)$ par conséquent, en faisant le produit des matrices, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

* Les symétries par rapport à des droites sont des déplacements donc $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est un déplacement. La matrice représentant la partie linéaire est symétrique, sa trace est -1 et son déterminant +1. Par conséquent, les valeurs propres sont 1, -1, -1 et $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est soit une symétrie par rapport à une droite, soit la composée d'une symétrie par rapport à une droite et une translation.

* On recherche les points fixes et pour cela on résout le système :

$$\begin{cases} 3x = -2x - y + 2z \\ 3y = -x - 2y - 2z \\ 3z = 2x - 2y + z + 6 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solutions et $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est la composée d'une symétrie par rapport à une droite et une translation.

* Un vecteur propre $\vec{u}$ de la partie linéaire pour la valeur propre 1 est directeur de la droite et colinéaire au vecteur translation. On trouve par exemple $\vec{u} (1, -1, 2)$ et on est amené à chercher l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\vec{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

$$\begin{cases} -2x - y + 2z - 3x = 3\lambda \\ -x - 2y - 2z - 3y = -3\lambda \\ 2x - 2y + z + 6 - 3z = 6\lambda \end{cases}$$

Le système est de rang 2, il aura des solutions si le déterminant ci-dessous est nul soit :

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 3\lambda \\ -1 & -5 & -3\lambda \\ 2 & -2 & 6\lambda - 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \lambda = 2/3.$$

Ainsi la droite a pour équation $\begin{cases} -5x - y + 2z = 2 \\ -x - 5y - 2z = -2 \end{cases}$ et la translation est de vecteur $2/3\vec{u}$.

4) La direction de la perpendiculaire commune s'obtient à partir du produit vectoriel des vecteurs directeurs des droites, soit :

$$(1, 1, 0) \wedge (-1, 1, 1) = (1, -1, 2)$$

Ainsi si $M(x, y, z)$ est sur la perpendiculaire commune et si $\vec{u}(1, 1, 0)$ est directeur de (AC), $\vec{v}(-1, 1, 1)$ est directeur de (BD') et $\vec{w}(1, -1, 2)$ est directeur de la perpendiculaire, alors on a la relation sur les produits mixtes:

$$(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{BM}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

et une équation de la perpendiculaire commune Δ est :

$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

La perpendiculaire commune est globalement invariante par σ_1 et par σ_2 donc par $\sigma_1 \circ \sigma_2$, comme $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est la composée d'une symétrie par rapport à une droite et une translation, elle a une seule droite invariante et cette droite est Δ . Il ne reste plus qu'à chercher le vecteur translation et pour cela on exprime l'image d'un vecteur de Δ , par exemple $M(0, 0, 1)$, alors $M'(2/3, -2/3, 7/3)$ et $\vec{MM'} (2/3, -2/3, 4/3)$.

$\sigma_1 \circ \sigma_2$ est le produit (commutatif) de la symétrie orthogonale autour de Δ et de la translation de vecteur $\vec{MM'} (2/3, -2/3, 4/3)$.

5) On fait le produit des matrices $M_R(\sigma_2 \circ \sigma_3) = M_R(\sigma_2) M_R(\sigma_3)$, on obtient :

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & -2 & 2 \\ \hline 3 & 4 & -2 & -1 & -2 \\ & -2 & -2 & 2 & 1 \end{array}$$

* Les symétries par rapport à des droites sont des déplacements, par rapport à des plans des antidéplacements, donc $\sigma_2 \circ \sigma_3$ est un antidéplacement. La matrice représentant la partie linéaire n'est pas symétrique, sa trace est $-1/3$ et son déterminant -1 . Par conséquent, les valeurs propres sont $-1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ avec $\cos(\alpha) = 1/3$.

$\sigma_2 \circ \sigma_3$ a un point fixe et est la composée (commutative) d'une rotation par rapport à une droite et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan. La droite passe par le point fixe et est de direction le sous espace propre de la partie linéaire pour la valeur propre 1 , le plan passe par le point fixe et est orthogonal à la droite.

* On recherche le point fixe et pour cela on résout le système :

$$\begin{cases} 3x = -x - 2y + 2z - 4 \\ 3y = -2x - y - 2z + 4 \\ 3z = -2x + 2y + z - 2 \end{cases}$$

On trouve le point $B(-1, 1, 1)$.

* On recherche un vecteur propre de la partie linéaire pour la valeur propre -1 , soit : $\vec{u}(1, 1, 0)$ et par conséquent, $\text{Vect}\{\vec{u}\}^\perp = \text{Vect}\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\} = \vec{P}$.

La droite passe par B et est de vecteur directeur $\vec{u}$, le plan passe par B et est de direction $\vec{P}$.

* Pour terminer il faut déterminer l'angle de rotation. Pour cela il faut choisir une des deux orientations possibles du plan, par exemple celle définie par le vecteur $\vec{u}$.

$$\text{On calcule } (\vec{u}, \vec{k}, \vec{f}(\vec{k})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \text{ et le sinus est positif.}$$

Par conséquent, l'angle de la rotation est $\text{Arcos}(1/3) \bmod[2\pi]$.

Exercice 2

partie 1

a) D_1 passe par le point de coordonnées $(0, 1, 0)$ et admet pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{u}(1, 0, -1)$.

D_2 passe par le point de coordonnées $(1, 0, -3)$ et admet pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{v}(0, 1, -2)$. Ainsi on a les équations paramétriques :

$$D_1 \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = \mu \\ z = -3 - 2\mu \end{cases}$$

b) A partir de la relation $(\vec{MM'} / \vec{u}) = 0$ et le milieu de M et M' est sur la droite D_1 , on obtient :

$$M_R(SD_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la relation $(\vec{MM'} / \vec{v}) = 0$ et le milieu de M et M' est sur la droite D_2 , on obtient :

$$M_R(SD_2) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -3 & -4 \\ -6 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

c) On fait le produit des matrices et on obtient :

$$M_R(SD_1 \circ SD_2) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -3 \\ 22 & 0 & 3 & 4 \\ -10 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) u est le produit de deux déplacements, c'est un déplacement. On résout le système $u(M) = M$ et on trouve que u n'a pas de point fixe. On remarque que la matrice représentant la partie linéaire admet 1 pour déterminant et 3/5 pour trace donc les valeurs propres sont : $1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ avec $\cos(\alpha) = -1/5$.

ii) Si Δ est une droite globalement invariante, alors $\vec{u}(\vec{\Delta}) = \vec{\Delta}$ et la direction de la droite est un vecteur propre de la partie linéaire de u, soit un vecteur propre pour la valeur seule propre 1. On obtient le vecteur propre $\vec{w}(1, 2, 1)$. Si $M(x, y, z)$ est sur la droite Δ , alors il existe λ tel que $Mu(\vec{M}) = \lambda \vec{w}$, on obtient :

$$\begin{cases} -5x + 4y - 3z + 6 = 5\lambda \\ -2y + 4z + 22 = 10\lambda \\ 5x - 5z - 10 = 5\lambda \end{cases}$$

Le système est de rang 2, il aura des solutions si le déterminant ci-dessous est nul soit :

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 5\lambda - 6 \\ 0 & -2 & 10\lambda - 22 \\ 5 & 0 & 5\lambda + 10 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \lambda = 4/3.$$

Ainsi la droite a pour équation $\begin{cases} -2y + 4z = -\frac{26}{3} \\ 5x - 5z = \frac{50}{3} \end{cases}$

iii) u est un vissage, produit commutatif d'une rotation d'axe Δ et d'une translation de vecteur $4/3 \vec{w}$. Il faut trouver l'angle de rotation, et pour cela orienter le plan vectoriel orthogonal à l'axe, par exemple en choisissant le vecteur $\vec{w}$.

$$\text{On calcule } (\vec{w}, \vec{k}, \vec{u}(\vec{k})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 2 & 0 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \text{ et le sinus est négatif donc .}$$

Par conséquent, l'angle de la rotation est $2\pi - \text{Arcos}(-1/5) \bmod[2\pi]$.

partie 2

a) 1) D'_1 et D'_2 sont non parallèles et non concourantes, donc il existe une unique droite Δ' perpendiculaire à D'_1 et D'_2 , c'est la perpendiculaire commune.

2) On choisit le repère orthonormé direct $R' = (A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, avec A dans $D'_2 \cap \Delta'$ et $\vec{u}$ vecteur directeur de D'_2 , et $\vec{v}$ vecteur directeur de Δ' . Alors :

$$M_{R'}(SD'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } M_{R'}(SD'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

En effet, $SD'_1(A)$ est sur la perpendiculaire commune et $AS_{D'_1}^{\rightarrow}(A) = x\vec{v}$, la matrice de la partie linéaire est une matrice de symétrie dans le plan vectoriel orthogonal à $\vec{v}$, θ est deux fois l'angle orienté des droites $D'_2 D'_1$.

$$M_{R'}(SD'_1 \circ SD'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ainsi, $SD'_1 \circ SD'_2$ est le produit commutatif de la rotation d'axe Δ et d'angle θ et de la translation de vecteur $x\vec{v}$, c'est un vissage.

3) La bijection réciproque du vissage est le produit commutatif de la rotation axiale Δ d'angle $-\theta$ et de la translation de vecteur $-x\vec{v}$, c'est un vissage.

b) Le cas est identique au précédent avec $x = 0$ on a donc une rotation axiale d'axe la perpendiculaire commune, la bijection réciproque étant d'angle opposé.

c) Si les droites sont parallèles, et si on choisit le repère orthonormé direct $R' = (A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, avec A dans D'_2 et $\vec{u}$ vecteur directeur de D'_2 , le plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$ contenant les deux droites, on vérifie facilement que le produit $SD'_1 \circ SD'_2$ est une translation de vecteur $AS_{D'_1}^{\rightarrow}(A) = x\vec{v}$.

partie 3

a) Soit f un déplacement qui n'a pas de point fixe et dont l'application linéaire associée est une rotation. On choisit un repère orthonormé direct $R'' = (B, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que $(B, \vec{u})$ est un repère de l'axe de rotation, $(\vec{v}, \vec{w})$ une base directe du plan vectoriel orthogonal au vecteur $\vec{u}$, alors l'image de B est sur l'axe de rotation, $\vec{u}$ est vecteur fixe et la restriction de $\vec{f}$ au plan vectoriel $\text{Vect}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ est une rotation dont la mesure de l'angle orienté est $\theta \bmod [2\pi]$ et non nul.

Ainsi :

$$M_{R''}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } \cos \theta \neq 1.$$

b) On considère la symétrie orthogonale S autour de la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$, alors :

$$M_{R^c}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } M_{R^c}(f \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$f \circ S$ est une symétrie orthogonale autour d'une droite d'équation :

$\begin{cases} 2x = a \\ y \cos \theta + z \sin \theta = y \end{cases}$, cette droite passe par le point de coordonnées $(a/2, 0, 0)$ et est de direction le vecteur de coordonnées $(0, \cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

Ainsi, $f = (f \circ S) \circ S$ produit non commutatif de deux symétries orthogonales axiales.

On notera que si f est un vissage, produit de deux symétries axiales, $f = S_{D'_1} \circ S_{D'_2}$ alors l'axe du vissage est perpendiculaire commune aux droites D'_1 et D'_2 , l'angle des droites (D'_2, D'_1) est la moitié de l'angle du vissage, si M_1 est le point commun de D_1 et de l'axe du vissage, si M_2 est le point commun de D_2 et de l'axe du vissage, alors le vecteur translation du vissage est $2 \vec{M_2 M_1}$.

Exercice 3

A)

1) $Is(F)$ est non vide puisqu'elle contient l'application identique, d'autre part si f et g sont dans $Is(F)$ alors $f \circ g(F) = f(g(F)) = F$ et $f^{-1} \circ f(F) = F = f^{-1}(F)$ et $Is(F)$ est un sous groupe de $Is(X)$.

$Is^+(F)$ est un sous groupe puisque intersection de deux sous-groupes de $Is(X)$.

2) Si $Is^-(F)$ est non vide et si g est dans $Is^-(F)$, alors :

* Si f est dans $Is^+(F)$, $g \circ f$ est dans $Is^-(X)$ et dans $Is(F)$ donc dans $Is^-(F)$.

* Si h est dans $Is^-(F)$, $g^{-1} \circ h$ est dans $Is^+(X)$ et $h = g \circ g^{-1} \circ h$ donc dans $g \circ Is^+(F)$.

Ainsi par double inclusion, $Is^-(F) = g \circ Is^+(F)$.

L'application de $Is^+(F)$ dans $Is^-(F)$ qui a f associe $g \circ f$ est bijective, et par conséquent si $Is(F)$ est fini alors, $\text{Card}(Is^+(F)) = \text{Card}(Is^-(F))$ et comme de plus on a une partition de l'espace, on obtient la relation $\text{Card}(Is(F)) = \text{Card}(Is^+(F)) + \text{Card}(Is^-(F))$.

Ainsi $\text{Card}(Is^+(F)) = \text{Card}(Is^-(F)) = 1/2 \text{Card}(Is(F))$.

B)

1) a) Si f est dans $Is(F)$, l'image d'un carré est un carré et 0 point commun des deux droites est un point fixe de f . Ainsi l'image du carré ABCD de centre 0, est un carré $f(A)f(B)f(C)f(D)$ de centre 0 et f est dans $Is(F')$.

Réciproquement, si f est dans $Is(F')$ alors la droite (AC) est une diagonale du carré (resp. la droite (BD)) et son image par f est une diagonale du carré. Comme f est un isomorphisme, $f(F) = F$. Ainsi $Is(F) = Is(F')$.

On notera que f admet 0, isobarycentre du carré, comme point fixe.

b) Si f est dans $Is^+(F')$ alors 0 étant un point fixe de f , f est une rotation de centre 0. Les rotations qui conservent le carré sont :

- * R_0 rotation de centre 0 et d'angle $0 \bmod[2\pi]$ ($R_0 = \text{Id}$).
- * $R_{\pi/2}$ rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2 \bmod[2\pi]$, $(ABCD \rightarrow BCDA)$.
- * R_π rotation de centre 0 et d'angle $\pi \bmod[2\pi]$ ($R = -\text{Id}$ et $(ABCD \rightarrow CDAB)$).
- * $R_{3\pi/2}$ rotation de centre 0 et d'angle $3\pi/2 \bmod[2\pi]$, $(ABCD \rightarrow DABC)$.

On sait que si g est dans $\text{Is}^-(F)$, alors $\text{Is}^-(F) = g \circ \text{Is}^+(F)$. On choisit la symétrie orthogonale d'axe la droite (AC) , $g = S_{AC}$ et par conséquent :

- * $g \circ R_0$ est la symétrie S_{AC} , $(ABCD \rightarrow ADCB)$.
- * $g \circ R_{\pi/2}$ est la symétrie S_{mAD} , mAD est la médiatrice de AD , $(ABCD \rightarrow DCBA)$.
- * $g \circ R_\pi$ est la symétrie S_{BD} , $(ABCD \rightarrow CBDA)$.
- * $g \circ R_{3\pi/2}$ est la symétrie S_{mAB} , mAB est la médiatrice de AB , $(ABCD \rightarrow BADC)$.

On obtient :

$$\text{Is}(F) = \text{Is}(F') = \{ \text{Id}, R_{\pi/2}, R_\pi, R_{3\pi/2}, S_{AC}, S_{mAD}, S_{BD}, S_{mAB} \}$$

2) a) Si f est dans $\text{Is}^+(F)$, alors f a un point fixe O et f est une rotation. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D , $\vec{u}$ est vecteur propre de $\vec{f}$ et les valeurs propres sont ± 1 et par conséquent $\vec{f} = \pm \text{Id}$. Ainsi f est soit l'application identique, soit la symétrie par rapport au point O notée S_O .

Si f est dans $\text{Is}^-(F)$, alors f a un point fixe O et f est une symétrie. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D , $\vec{u}$ est vecteur propre de $\vec{f}$ et les valeurs propres sont ± 1 et par conséquent $\vec{f}(\vec{u}) = \pm \vec{u}$. Ainsi f est soit la symétrie orthogonale autour de d'axe D , soit la symétrie orthogonale d'axe orthogonal à D passant par O , notée respectivement S_D et $S_{D^\perp}$. On obtient :

$$\text{Is}_O(F) = \{ \text{Id}, S_O, S_D, S_{D^\perp} \}.$$

b) Si $\vec{u} \in \vec{\Delta}$ et si $g \in \text{Is}_O(F)$ alors $t_{\vec{u}} \circ g = f$ est une isométrie. Si M est dans F , $g(M)$ aussi donc $f(M)$ est dans F . Ainsi $f(F) = F$ et f est dans $\text{Is}(F)$.

Réciproquement, si $f \in \text{Is}(F)$ alors O est dans D et D est globalement invariante. Par conséquent, $\vec{u} = \vec{Of}(O)$ est dans $\vec{D} = \vec{\Delta}$.

Si on pose $g = t_{-\vec{u}} \circ f$, alors g est une isométrie qui conserve F et $g(O) = f(O) - \vec{Of}(O) = O$ et ainsi g est dans $\text{Is}_O(F)$.

Dans ce cas, $\text{Is}(F) = \{ t_{\vec{u}} \circ g / \vec{u} \in \vec{\Delta} \text{ et } g \in \text{Is}_O(F) \}$.

Remarque : Le seul cas non envisagé est le cas où les droites sont concourantes en un point O .

Dans ce cas, O est point fixe et on est ramené à un problème vectoriel. $\text{Is}(F)$ est alors composé des deux symétries par rapport aux bissectrices et des deux rotations Id (angle 2π) et la symétrie par rapport au point O (angle π).

Exercice 4

1) Dans l'espace, une symétrie par rapport à un plan est une isométrie indirecte, f est un produit impair d'isométries indirectes, c'est une isométrie indirecte.

Si $f^2 = \text{Id}$, alors $f^{-1} = f$ et $\vec{f}$ est symétrique et orthogonale, ainsi ses valeurs propres sont réelles et égales à ± 1 .

D'autre part, si M est un point de E , $f^2(M) = M$ et par conséquent, le milieu de $Mf(M)$ est un point fixe O de f .

On distingue deux cas :

* -1 est valeur propre triple de $\vec{f}$, f a un point fixe O et f est une symétrie par rapport à ce point.

* -1 est valeur propre simple (et 1 double), f est une symétrie par rapport à un plan, c 'est le plan passant par O et de direction le sous espace propre pour la valeur 1 .

2) On choisit un repère cartésien orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan P_1 . Ainsi ;

$$M_{ER}(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; M_R(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; M_R(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$$M_R(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_R(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a+b & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\sigma_1 \circ \sigma_2$ est la translation de vecteur $-a\vec{k}$, $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est la symétrie orthogonale par rapport à un plan parallèle à P_1 et passant par le point de coordonnées $(0, 0, (-a+b)/2)$.

3) $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est directe et D est une droite de points fixes donc c 'est une rotation d'axe D . D'autre part, D est aussi un ensemble de points fixes de f . D'après le point 1) f est une symétrie plan et par conséquent f est une symétrie orthogonale autour d'un plan passant par D .

4) Si les trois plans sont deux à deux orthogonaux, on peut choisir un repère composé du point A , intersection des trois plans et des vecteurs normaux à chaque plan. En faisant le produit des matrices représentant les symétries dans ce repère, on montre facilement que f est la symétrie par rapport à A .

5) Si P_1 est parallèle à P_2 alors d'après 2), $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est une translation de vecteur $\vec{u}$, orthogonal à P_1 ; $\sigma_1 \circ \sigma_2 = t_{\vec{u}}$.

De la relation $f^2 = \text{Id}$ on tire $t_{\vec{u}} \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ t_{-\vec{u}}$. Si on choisit un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan P_3 , alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R(t_{\vec{u}} \circ \sigma_3)$$

et par conséquent $a=-a$; $b=-b$; $c=c$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à P_3 et les trois plans sont parallèles.

6) Si P_1 et P_2 se coupent suivant une droite D , alors d'après 3), $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est une rotation R_θ d'axe D et d'angle orienté $\theta \bmod[2\pi]$ (on oriente le plan orthogonal à D en choisissant un vecteur porté par D).

De la relation $f^2 = \text{Id}$ on tire $R_{-\theta} = \sigma_3 \circ R_\theta \circ \sigma_3$, rotation d'axe D et d'angle $-\theta \bmod[2\pi]$.

Ainsi, $\sigma_3 \circ R_{\theta} \circ \sigma_3 (\sigma_3(D)) = \sigma_3(D)$ et $\sigma_3(D)$ est une droite globalement invariante pour la rotation $R_{-\theta}$ et par conséquent $\sigma_3(D) = D$.

D est globalement invariante pour σ_3 et on a l'alternative :

* P_3 contient D .

* P_3 est orthogonal à D . Dans ce cas, P_3 est globalement invariant par f et par $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et la restriction $(\sigma_1 \circ \sigma_2 / P_3)^2 = \text{Id}_{P_3}$. Ainsi, $2\theta = 0 \pmod{2\pi}$ et $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ et, P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

Exercice 5

On peut remarquer que si f transforme un repère en un repère, alors f est unique et par conséquent si deux triangles sont égaux alors il existe une unique isométrie qui transforme l'un en l'autre.

1)

a) $\Rightarrow$ b) C'est une conséquence immédiate des propriétés des isométries.

b) $\Rightarrow$ c) On utilise la relation $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{A})$ et on obtient $\widehat{A} = \widehat{A}'$.

c) $\Rightarrow$ d) On utilise la relation $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{A})$ et on obtient $\|\vec{BC}\| = \|\vec{B'C'}\|$, on utilise alors la relation $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 - 2\|\vec{BC}\|\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{B})$ et $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

d) $\Rightarrow$ a) On sait que la somme des écarts angulaires est π et par conséquent $\widehat{C} = \widehat{C}'$.

D'autre part on a : $\frac{\|\vec{BC}\|}{\sin \widehat{A}} = \frac{\|\vec{AB}\|}{\sin \widehat{C}} = \frac{\|\vec{AC}\|}{\sin \widehat{B}}$ et $\|\vec{AC}\| = \|\vec{A'C'}\|$ et $\|\vec{BC}\| = \|\vec{B'C'}\|$.

ABC et $A'B'C'$ sont des repères affines et il existe une application affine unique f telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Montrons que f est une isométrie :

Si M est un point du plan, il existe a, b tels que $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ et $\|\vec{AM}\|^2 =$

$$\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2ab\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{A}) \text{ et,}$$

$$f(A)f(M) = A'M' = aA'B' + bA'C'$$

Ainsi, à partir des relations précédentes, on montre que f est une isométrie.

2) On oriente le plan affine euclidien et ainsi il existe un unique point C tel que $(A, \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \vec{AC})$ est un repère orthonormé direct. D'autre part, il existe un point C' unique

tel que $(A', \frac{\vec{A'B'}}{\|\vec{A'B'}\|}, \vec{A'C'})$ est un repère orthonormé direct et de même il existe un

point D unique tel que $(A, \frac{\vec{A'B'}}{\|\vec{A'B'}\|}, \vec{A'D})$ est un repère orthonormé indirect.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux et il existe une unique déplacement f qui transforme ABC en $A'B'C'$. Les triangles ABC et $A'B'D$ sont égaux et il existe une unique antidéplacement f qui transforme ABC en $A'B'D$.

Que peut-on dire de f ?

f est une translation ou une rotation.

* Si $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ alors f est la translation de vecteur $\vec{AA'}$.

* Sinon, les médiatrices de AB et $A'B'$ se coupent en un point O et f est la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{AOA'})$.

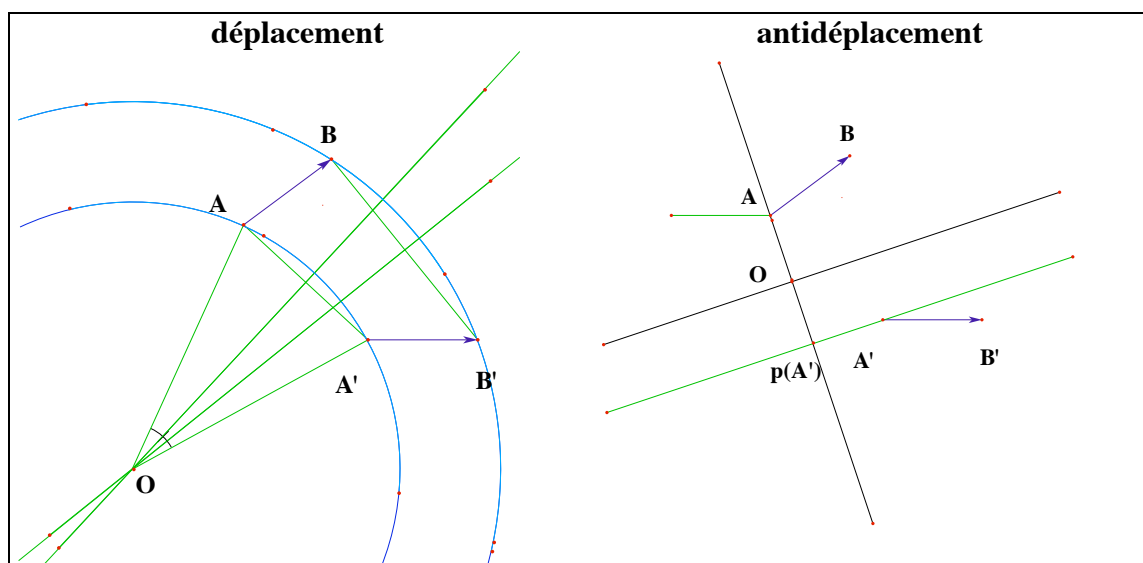
Que peut-on dire de g ?

g est une symétrie axiale composée avec une translation de vecteur porté par l'axe, alors le vecteur $\vec{AA'} - \vec{BB'} = \vec{AB} + \vec{B'A'}$ est orthogonal à l'axe.

* Si $\vec{AB} = \vec{A'B'}$, g est le produit de la symétrie autour de la droite passant par l'intersection des droites (AB') et $(A'B)$ et parallèle à (AB) et d'une translation de vecteur $Ap(\vec{A'})$ (p est la projection orthogonale sur la droite (AB)).

* Si non, si $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{B'A'}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on note $p(A')$ la projection orthogonale de A' sur la droite passant par A et de direction $\vec{u}$ et O le milieu de A et $p(A')$.

g est le produit de la symétrie orthogonale autour de la droite passant par O et de direction $\vec{v}$, avec la translation de vecteur $A'p(\vec{A'})$.



3) On suppose que le plan euclidien est orienté et soient D et D' deux droites concourantes en un point O . Si M est un point équidistant aux deux droites alors, si on note H et H' les projections orthogonales de M respectivement sur D et D' , les triangles OHM et $OH'M$ sont égaux.

Il existe une isométrie unique f transformant OHM en $OH'M$. Comme $f(O)=O$ et $f(M)=M$, la droite (OM) , est une droite de points fixes et f est une symétrie d'axe (OM) et $(\widehat{HOM}) = -(\widehat{H'OM}) \bmod [2\pi]$.

Ainsi, M est sur une bissectrice des droites D et D' .

Réciproquement, si M est sur une bissectrice et si H et H' sont les projections orthogonales de M respectivement sur D et D' , les triangles OHM et $OH'M$ sont égaux et $\|\vec{HM}\| = \|\vec{H'M}\|$.

Exercice 6

a) Si A, B, C étaient alignés, alors on aurait, par exemple $\vec{AB} = a\vec{AC} = -\vec{AC}$ et $\vec{BC} = -2\vec{AC}$ ce qui est impossible. Donc (A, B, C) est un repère affine R de E .

b) De la relation $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2(\vec{AB}/\vec{AC})$ on déduit que $(\vec{AB}/\vec{AC}) = -1/2\|\vec{AC}\|^2$. On a de même $(\vec{BA}/\vec{BC}) = -1/2\|\vec{AC}\|^2 = (\vec{CA}/\vec{CB})$.

Si f est une application affine de E qui conserve le triangle ABC , alors si M est un point de E , $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ et $f(A)f(M) = af(A)f(B) + bf(A)f(C)$.

$$\|f(A)f(M)\|^2 = a^2 \|f(A)f(B)\|^2 + b^2 \|f(A)f(C)\|^2 - 2ab(f(A)f(B)/f(A)f(C)) = \|\vec{AM}\|^2$$

Ainsi, f est une isométrie.

On notera que l'isobarycentre O est un point fixe de f . L'application f est déterminée par les images du repère R . Il y a 6 permutations des points A, B, C et par conséquent 6 isométries : $f_1=[ABC] = \text{Id}$, $f_2=[ACB]$, $f_3=[BAC]$, $f_4=[BCA]$, $f_5=[CAB]$, $f_6=[CBA]$.

La table de multiplication de H_{ABC} pour la loi $\circ$ est :

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

C'est un sous groupe non commutatif puisque $f_2 \circ f_6 \neq f_6 \circ f_2$.

H_{ABC} n'est pas un sous groupe distingué de l'ensemble des isométries de E , par exemple si g est la symétrie orthogonale autour de (AB) et si f_2 est la symétrie autour de (OA) , $g^{-1} \circ f_2 \circ g$ ne conserve pas le triangle.

c) Les matrices représentant les isométries de H_{ABC} dans le repère R sont :

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad f_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f_1 est l'application identique, f_2 est la symétrie autour de la droite (OA), f_3 est la symétrie autour de la droite (OC), f_4 est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$, f_5 est la rotation de centre O et d'angle $4\pi/3$, f_6 est la symétrie autour de la droite (OB).

d) A', B', C' sont trois points non alignés de E, ils constituent un repère affine R' et par conséquent, il existe une application affine bijective unique ϕ transformant le repère R' en le repère R .

Si on note $HA'B'C'$ l'ensemble des applications affines qui conservent le triangle $A'B'C'$, il est clair que l'on a la relation $HA'B'C' = \phi^{-1} \circ HABC \circ \phi$.

Ainsi le nombre d'éléments de $HA'B'C'$ est 6.

On pouvait démontrer directement ce résultat en raisonnant de la même façon qu'en b) c'est à dire en utilisant les permutations des points A', B', C' .

e) *Application :*

La matrice $M_R(R') = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = M_R(\phi) = P$, et $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 & -1 & -6 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. Le point A'

est au milieu de AB, B' est sur la droite (AB) et sur la droite ($A'C$) donc le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A' .

Les matrices représentant les applications affines conservant les points $A'B'C'$ dans le repère R sont obtenues à partir de la relation $HA'B'C' = \phi^{-1} \circ HABC \circ \phi$.

Ainsi les 6 matrices sont :

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 10 & 18 & 6 \end{bmatrix} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -7 & -11 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 10 & 18 & 6 \end{bmatrix} \quad g_5 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 15 & 1 \\ -5 & -9 & 1 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad g_6 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 5 & 9 & -1 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

La matrice ${}^tMM = \frac{25}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 4/3 \end{bmatrix}$, elle est symétrique, son déterminant est positif,

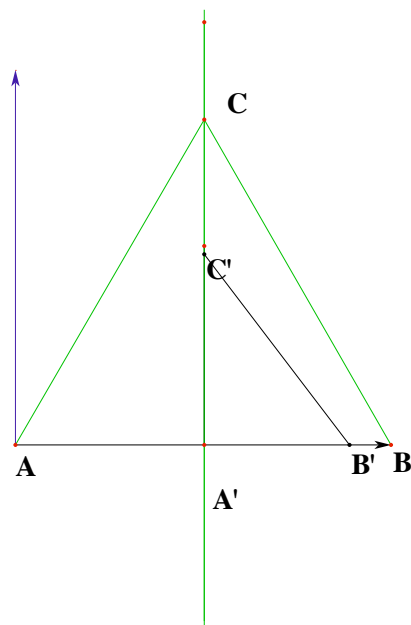
sa trace aussi. Par conséquent ses valeurs propres sont positives et f est un produit scalaire.

$$A'\vec{B}' = \frac{2}{5}\vec{AB}, \quad A'\vec{C}' = \frac{\sqrt{3}}{5}\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad B'\vec{C}' = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{\sqrt{3}}{5}\vec{e}_2$$

$$(A'\vec{B}' / A'\vec{B}')_f = [2/5 \ 0] {}^tMM {}^t[2/5 \ 0] = 1$$

$$(A'\vec{C}' / A'\vec{C}')_f = [0 \ \sqrt{3}/5] {}^tMM {}^t[0 \ \sqrt{3}/5] = 1$$

$$(B'\vec{C}' / B'\vec{C}')_f = [-2/3 \ \sqrt{3}/5] {}^tMM {}^t[-2/3 \ \sqrt{3}/5] = 1$$



Ainsi, dans cette nouvelle structure euclidienne, $A'B'C'$ est un triangle équilatéral .
 On constate dans cet exemple la distinction entre structure affine et structure euclidienne, en fait un triangle (un repère affine) étant donné, on peut choisir la structure euclidienne de façon que le triangle soit ce que l'on veut ; isocèle, rectangle, équilatéral .