Chapitre VIII- LE GROUPE DES SIMILITUDES

1) Définitions et propriétés.

Si E est un espace affine euclidien de dimension n, une similitude de rapport $k \neq 0$ est une bijection affine f de E telle que:
Si x et y sont deux points quelconque de E alors :

$$d(f(x),f(y))= k\, d(x,y)= k\ \|\overrightarrow{xy}\|=\|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|.$$

On peut noter que :

-Dans cette définition k est positif et que $\vec{f}$ est le produit de k par un automorphisme orthogonal .

-Les similitudes de rapport 1 sont exactement des isométries.

-Les homothéties de rapport k sont des similitudes de rapport $|k|$.

-Si f est une similitude de rapport k et si H est une homothétie de centre O et de rapport k alors $g = H^{-1} \circ f$ est une isométrie.

-Si H est une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$ et si g est une isométrie, alors :

$$H \circ g \text{ et } g \circ H \text{ sont des similitudes de rapport } |k|.$$

- Si f est une similitude, on dira que f est directe (resp. indirecte) si $\vec{f}$ est directe (resp. indirecte).

Théorème : Si f est une application de E non constante, les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) f est une similitude de rapport $k > 0$.

b) il existe $k > 0$ tel que pour tout x, y dans E , on ait $\|\overrightarrow{xy}\| = k\, \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|$.

c) Pour tout x, y, x', y' distincts dans E on a $\dfrac{\|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|}{\|\overrightarrow{f(x')f(y')}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{xy}\|}{\|\overrightarrow{x'y'}\|}$.

a)$\Rightarrow$b) et b) $\Rightarrow$c) sont des conséquences directes.
Montrons c) $\Rightarrow$ a)
On choisit deux points distincts fixés x et y alors, si x' et y' sont deux points distincts de E, on a la relation :

$$\frac{\|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|}{\|\overrightarrow{xy}\|} = \frac{\|\overrightarrow{f(x')f(y')}\|}{\|\overrightarrow{x'y'}\|} = k \text{ et } k \text{ est différent de } 0.$$

L'application g qui a z dans E associe $g(z) = f(x) + \frac{1}{k}\overrightarrow{f(x)f(z)}$, vérifie $g(x)=f(x)$ et on a la relation :

$$\|\overrightarrow{g(z)g(x)}\| = \|\overrightarrow{g(z)f(x)}\| = 1/k \, \|\overrightarrow{f(z)f(x)}\| = \|\overrightarrow{zx}\|.$$

Ainsi g est une isométrie et f une similitude de rapport k.

Théorème : Si f est une similitude de E de rapport $k \neq 1$, f a un point fixe unique O appelé centre de la similitude.

Si f est une similitude de E de rapport $k \neq 1$, l'application $\vec{f}$ n'admet pas 1 pour valeur propre donc f a un unique point fixe.
Ainsi, dans ce cas quitte à choisir le point fixe comme origine, une similitude est une similitude vectorielle et par conséquent, une similitude est le produit commutatif d'une homothétie (de centre le point fixe et de rapport le rapport de similitude) et d'une isométrie ayant un point fixe.
Par exemple, dans le plan affine euclidien, une similitude directe est le produit d'une homothétie et d'une rotation de même centre, une similitude indirecte est le produit d'une homothétie et d'une symétrie axiale, l'axe contenant le centre de l'homothétie.

On notera que les similitudes de rapport 1 sont les isométries.

Théorème : Si f est une bijection affine de E , les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) f est une similitude

b)Pour tout A, B, C points de E distincts on a $B\widehat{A}C = f(B)f(\widehat{A})f(C)$

c) Pour tout A, B, C, D quatre points distincts de E si la droite (AB) est orthogonale à (CD), alors la droite (f(A)f(B)) est orthogonale à (f(C)f(D)).

a)⇒b) est une conséquence directe de la définition des écarts angulaires.

b) ⇒c) aussi puisque $\dfrac{(f(\overrightarrow{AB}) / f(\overrightarrow{AC}))}{\|f(\overrightarrow{AB})\|\|f(\overrightarrow{AC})\|} = \dfrac{k^2(\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{AC})}{k^2\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|}$.

Montrons c) ⇒ a)
On choisit quatre points distincts A, B, C, D et on considère les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB})\|} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB})\|} - \dfrac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}$.
on montre facilement qu'ils sont orthogonaux et par conséquent,

$$\vec{f}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB})\|} + \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}\right) \text{ et } \vec{f}\left(\frac{\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB})\|} - \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}\right) \text{ le sont aussi.}$$

Ainsi $\left(\frac{\vec{f}(\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB}\|}+\frac{\vec{f}(\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CD}\|} \bigg/ \frac{\vec{f}(\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB}\|}-\frac{\vec{f}(\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CD}\|}\right)=0$ En développant le produit scalaire, on obtient :

$\frac{\|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\|\vec{f}(\overrightarrow{CD})\|}{\|\overrightarrow{CD}\|}$ et on peut appliquer le théorème précédent.

2) Le groupe des similitudes

L'ensemble des similitudes affines de E est noté Sim(E), c'est un sous-groupe de GA(E) puisque Sim(E) est l'image réciproque par l'homomorphisme L de l'ensemble des similitudes vectorielles .

Comme dans le cas des isométries, on note $Sim^+(E)$ (resp $Sim^-(E)$) l'ensemble des similitudes directes (resp. indirectes) .

$Sim^+(E)$ est un sous groupe distingué de Sim(E) d'indice 2 et par conséquent, $Sim^-(E)$ est le complémentaire de $Sim^+(E)$ dans Sim(E).

Les sous groupes suivants sont aussi distingués dans Sim(E):

- Le groupe HT(E) des homothéties et translations de E.

- Le groupe $HT^+(E)$ des homothéties de rapport strictement positif et translations de E.

- Les groupes Is(E) et $Is^+(E)$.

On notera que si E est le plan affine euclidien orienté, alors les similitudes directes conservent les angles orientés, les similitudes indirectes conservent les angles orientés avec changement de signe.

Les similitudes planes

On suppose dim(E) = 2 et soit$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E. Si f est une similitude de E, sa représentation matricielle dans le repère est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & -\varepsilon c \\ d & c & \varepsilon b \end{bmatrix}$$

$\varepsilon = \pm 1$, b ou c non nuls , le rapport de similitude est $(b^2+c^2)^{1/2}$, le déterminant étant $\varepsilon (b^2+c^2)$, la similitude est directe si $\varepsilon = +1$, indirecte sinon. (le repère étant direct !!)

Réciproquement une représentation matricielle de ce type est la représentation d'une similitude.

Exercices du chapitre VIII

Exercice 1

On suppose que X est le plan affine euclidien (dimension 2). On dit que deux triangles sont semblables si il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre. Il est clair que cette relation est une relation d'équivalence.

1) **Cas de similitude des triangles.**

Soient A B C et A' B' C' deux triangles non aplatis (ils constituent chacun un repère affine). On notera $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ l'écart angulaire (non orienté)correspondant au point A, et des notations analogues pour les autres points.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

a) Il existe une similitude s telle que : s(A) = A', s(B) = B', s(C) = C' .

b) $\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{A'B'}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{A'C'}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|}$. (1° cas)

c) $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$. (2° cas)

2)Soient A, B, A', B' quatre points du plan affine euclidien tels que $A \neq B$, $A' \neq B'$ et, $\|\overrightarrow{AB}\| = 1/k \; \|\overrightarrow{A'B'}\|$ avec $k \neq 1$(le cas des isométries ayant été étudié précédemment). Montrer qu'il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g telles que :

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \qquad \begin{cases} g(A) = A' \\ g(B) = B' \end{cases}$$

3)*Application :*

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(0, 0), B(1, 0), A'(1, 1), B'(1, 3) définis par leurs coordonnées dans le repère. Etudier f et g .

Exercice 2

Etude de la relation de conjugaison.

1) Si E est un espace affine euclidien de dimension n et si f est une similitude de E de rapport $k \neq 1$ et de centre O, montrer que si g est une similitude indirecte de E, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude de rapport k et de centre g(O).

2) Si E est le plan affine euclidien orienté et si f est une similitude directe de E de rapport k , de centre O et d'angle θ mod[2π] , montrer que si g est une similitude de E, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude directe de rapport k et de centre g(O). Que peut-on dire de l'angle de la rotation ?

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f et g commutent.

3) Si E est le plan affine euclidien orienté et si f est une similitude indirecte de E de rapport k , de centre O et d'axe D , montrer que si g est une similitude de E, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport k et de centre g(O). Que peut-on dire de l'axe de la symétrie ?
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f et g commutent.

Exercice 3

Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ un repère affine d'un espace affine euclidien X de dimension n, n >1 et $(b_0, b_1, ..., b_n)$ (n+1) points de X tels que :
Si i, j sont dans {0,…, n}, alors $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ (d désigne la distance).

Montrer qu'il existe une et une seule isométrie f telle que pour tout i dans {0,…, n}, $f(a_i) = b_i$.

1)En déduire que si $(a_0, a_1, ..., a_n)$ est un repère affine de X et si les points $(b_0, b_1, ..., b_n)$ sont tels que :
Il existe $\mu > 0$ tel que si i, j sont dans {0,…, n}, on a $d(a_i, a_j) = \mu\, d(b_i, b_j)$, alors il existe une et une seule similitude s telle que pour tout i dans {0,…, n} $s(a_i) = b_i$.

2)Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ une famille affinement libre de X et $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ une famille de n points de X tels que:
Il existe $\mu > 0$ tel que si i, j sont dans {0,…, n-1}, on a $d(a_i, a_j) = \mu\, d(b_i, b_j)$.
Montrer qu'il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g telles que pour tout i et j dans {0,…, n-1}, $f(a_i) = b_i$ et $g(a_i) = b_i$.

Exercice 4

ç désigne le corps des complexes, il est aussi un espace vectoriel sur € de dimension deux et un espace affine euclidien sur lui même.
Lorsque l'on représente un nombre complexe sous forme géométrique, on considère que celui-ci représente un point du plan affine euclidien orienté E_2. Plus précisément, si on considère un repère othonormé direct R' = $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan , l'isomorphisme d'espaces affines qui transforme le repère R' en le repère (0, 1, i) de ç est un isomorphisme direct pour les structures affines euclidiennes.
Dans toute la suite de l'exercice, on identifiera E_2 et ç , un point du plan est représenté par un nombre complexe appelé son affixe.
Le repère cartésien orthonormé direct canonique de ç sera noté R = (O, 1, i) . Ainsi la représentation d'un complexe dans ce repère est la partie réelle et la partie imaginaire, son module étant la norme de la structure euclidienne.
Si a est un complexe non nul et b un complexe, montrer que l'application $f_{a,\,b}$ qui a $z \in$ ç associe le complexe $f_{a,\,b}(z) = az + b$ est une similitude directe et que les similitudes directes s'écrivent sous cette forme. Comment représente-t-on les similitudes indirectes ?

a) Montrer que l'ensemble G des similitudes directes forme un groupe pour la composition des applications.
On note T = { $f_{1,b}$ dans G / b ∈ ç }, montrer que T est un sous groupe commutatif et distingué de G. On remarquera que T est l'ensemble des translations.

b) Etant donnés quatre points z_1, z_2, z_1' et z_2' du plan complexe tels que $z_1 \neq z_2$ et $z_1' \neq z_2'$, montrer qu'il existe un élément f de G unique tel que $f(z_1) = z_1'$ et $f(z_2) = z_2'$.

c) Montrer que tout élément f de G qui n'est pas une translation admet un point fixe unique (c'est à dire un point z_0 tel que $f(z_0) = z_0$)

d) Etant donné un point z_0, montrer que l'ensemble $G_{z_0} = \{ f \in G \; ; \; f(z_0) = z_0 \}$ est un sous groupe commutatif de G.

e) Montrer que tout sous groupe commutatif de H de G est contenu soit dans le sous groupe T soit dans un sous groupe G_{z_0}.

f) Soient f et g deux éléments de G que peut-on dire de $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$? Montrer que tout sous groupe H de G qui ne contient aucune translation distincte de l'identité est commutatif.

Exercice 5

On suppose que E est un espace affine euclidien de dimension deux, muni d'un repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note R_α la rotation de centre O et d'angle α mod $[2\pi]$; si $\alpha = \pi/2$, il s'agit du quart de tour direct, noté R.
Montrer que l'on a la relation $\vec{R}_\alpha = \cos\alpha \, \vec{Id} + \sin\alpha \, \vec{R}$, où Id désigne l'application identique.

On appelle parallélogramme direct (resp. indirect), la donnée de quatre points distincts ordonnés Π = (IJKL) tels que $(I, \vec{IJ}, \vec{IL})$ est un repère cartésien direct (resp indirect) de E et $\vec{IK} = \vec{IJ} + \vec{IL}$.

On appelle carré un parallélogramme (IJKL) tel que $\|\vec{IJ}\| = \|\vec{IL}\|$ et $(\vec{IJ} / \vec{IL}) = 0$.

Un repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère carré direct (resp. indirect) si et seulement si $\vec{R}(\vec{u}) = \vec{v}$ (resp. $\vec{R}(\vec{u}) = -\vec{v}$)
On se propose d'étudier les décompositions des similitudes du plan en transformations élémentaires. A cet effet, on utilise un outil géométrique, à savoir l'action des applications sur les parallélogrammes et sur les carrés, et un outil algébrique, à savoir la décomposition d'un endomorphisme en somme de similitude (cf. partie 2).

Partie 1

1) Soit f une application affine bijective, montrer que les propositions ci-dessous sont équivalentes:

a) f est une similitude directe ;
b)Il existe un carré direct dont l'image par f est un carré direct ;
c) $\vec{f}$ et $\vec{R}$ commutent ;
d)L'image par f de tout carré direct est un carré direct .

2) Caractériser de même les similitudes indirectes.

3) Soit $(A, \vec{u}, \vec{v})$ un repère non carré de E , montrer que $(A, \vec{u} + \vec{R}(\vec{v}), \vec{v} - \vec{R}(\vec{u}))$ est un repère carré indirect, que $(A, \vec{u} - \vec{R}(\vec{v}), \vec{v} + \vec{R}(\vec{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte. Exprimer le rapport de cette similitude et déterminer l'axe de la réflexion associée.

Le plan E étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A étant de coordonnées (1,1) ,$\vec{u}$ de coordonnées (3,2) et $\vec{v}$ de coordonnées (6,-1) dans ce repère, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et l'axe de la réflexion.

Partie 2: Décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes.

On se place dans le cadre vectoriel, $\vec{E}$ est un espace euclidien de dimension 2. On se propose de décomposer un endomorphisme de $\vec{E}$ en somme d'une similitude (vectorielle) directe et d'une similitude(vectorielle) indirecte. On note End($\vec{E}$) l'algèbre des endomorphismes de $\vec{E}$.

1) Opération du quart de tour direct par conjugaison.
A tout endomorphisme $\vec{u}$ on associe l'endomorphisme $\sigma(\vec{u}) = \vec{R} \circ \vec{u} \circ \vec{R}^{-1}$.

a) Vérifier que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité.

b) Soit S^+ (resp. S^-) l' ensemble des endomorphismes $\vec{u}$ de End($\vec{E}$) tels que : $\sigma(\vec{u})=\vec{u}$ (resp. $\sigma(\vec{u})=-\vec{u}$).Montrer que End($\vec{E}$) = $S^+ \oplus S^-$, les projecteurs associés étant les applications 1/2(Id + σ) et 1/2(Id - σ).

c)Vérifier que les éléments non nuls de S^+ (resp. S^-) sont les similitudes vectorielles directes.(resp. indirectes)

2) Ecriture canonique d'un endomorphisme.

a)Etablir que tout endomorphisme $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme: (dite canonique)

$$\vec{u} = \alpha \mathrm{Id} + \beta\vec{R} + \gamma\vec{S}$$

où α, β, γ sont des nombres réels et où $\vec{S}$ est une réflexion. Etudier l'unicité d'une telle écriture, en distinguant deux cas suivant que l'endomorphisme est dans S^+ ou non.

b)Dans ces conditions, expliciter la matrice associée à $\vec{u}$ dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est invariant par $\vec{S}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de $\vec{u}$ en fonction de α, β, γ.

c) Caractériser les triplets (α, β, γ) tels que $\vec{u}$ soit symétrique; préciser alors les valeurs propres et les sous espaces propres de $\vec{u}$.

Solutions des exercices du chapitre VIII

Exercice 1

On peut remarquer que si f transforme un repère en un repère, alors f est unique et par conséquent si deux triangles sont semblables alors il existe une unique isométrie qui transforme l'un en l'autre.

1)

a)⇒b) C'est une conséquence immédiate des propriétés des similitudes.

b)⇒c) Si $\dfrac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{A'B'}\|} = \dfrac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{A'C'}\|} = \dfrac{\|\vec{BC}\|}{\|\vec{B'C'}\|} = k$, alors on utilise la relation $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\,\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{A})$ et on obtient $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et de façon analogue on obtient $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

c)⇒a) On a : $\dfrac{\|\vec{BC}\|}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{\|\vec{AB}\|}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{\|\vec{AC}\|}{\sin\widehat{B}} = 2R$ et la relation correspondante pour le triangle A'B'C'. Ainsi $\dfrac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{A'B'}\|} = \dfrac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{A'C'}\|} = \dfrac{\|\vec{BC}\|}{\|\vec{B'C'}\|} = \dfrac{2R}{2R'} = k$

ABC et A'B'C' sont des repères affines et il existe une application affine unique f telle que : f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'. Montrons que c'est une similitude :

Si M est un point du plan, il existe a, b tels que $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ et $\|\vec{AM}\|^2 = \|a\vec{AB}\|^2 + \|b\vec{AC}\|^2 - 2ab\|\vec{AC}\|\,\|\vec{AB}\|\cos(\widehat{A})$ et,

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{A'M'} = a\vec{A'B'} + b\vec{A'C'}$$

Ainsi, à partir des relations précédentes, on montre que f est une similitude de rapport 1/k.

On notera que l'on peut montrer que les propositions précédentes sont aussi équivalentes à : d) $\dfrac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{A'B'}\|} = \dfrac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{A'C'}\|}$ et $\widehat{A} = \widehat{A'}$. (3° cas)

2) On oriente le plan affine euclidien et ainsi il existe un unique point C tel que (A, $\dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \vec{AC}$) est un repère orthonormé direct .D'autre part, il existe un point C' unique tel que (A', $\dfrac{\vec{A'B'}}{\|\vec{A'B'}\|}, \vec{A'C'}$) est un repère orthonormé direct et de même il existe un point D unique tel que (A, $\dfrac{\vec{A'B'}}{\|\vec{A'B'}\|}, \vec{A'D}$) est un repère orthonormé indirect . On considère le point F tel que $\vec{A'F} = k\vec{A'C'}$, le point G tel que $\vec{A'G} = k\vec{A'D}$

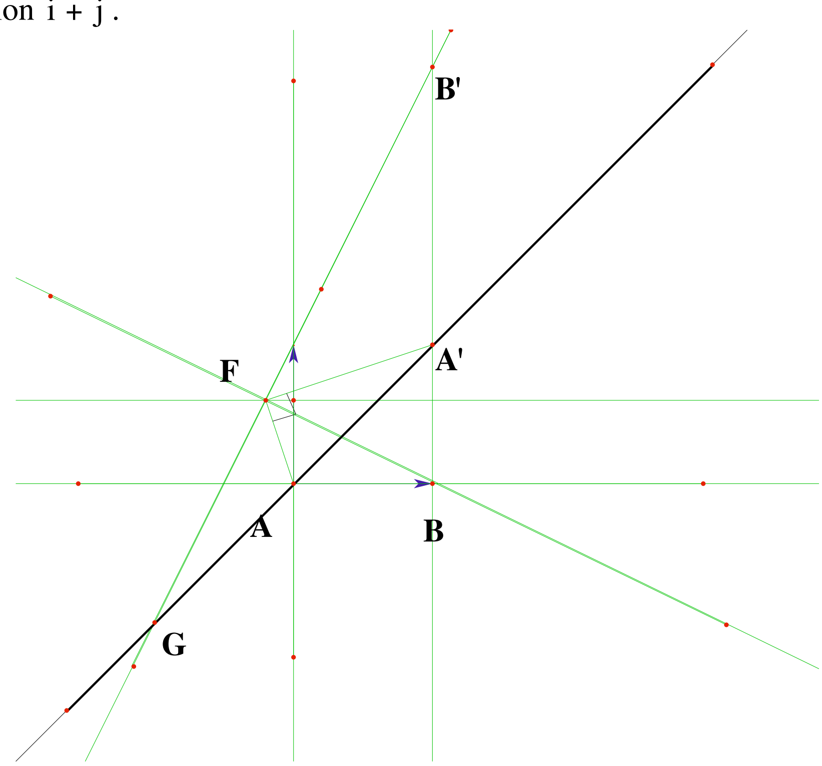
Les triangles ABC et A'B'F sont semblables et il existe une unique similitude directe f qui transforme ABC en A'B'F. Les triangles ABC et A'B'G sont semblables et il existe une unique similitude indirecte f qui transforme ABC en A'B'G.

f est le produit commutatif d'une rotation et d'une homothétie de rapport k de même centre.
g est le produit commutatif d'une symétrie axiale et d'une homothétie de rapport k de centre porté par l'axe.
3) Les matrices représentant f et g dans le repère sont :

$$M_R(f)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad M_R(g)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Que peut-on dire de f ?
f admet pour point fixe le point H(-1/5, 3/5) et l'angle de rotation est $\pi/2$ mod $[2\pi]$, f est le produit commutatif de la rotation et de l' homothétie de rapport 2 de centre H.

Que peut-on dire de g ?
g admet pour point fixe le point G(-1, -1) et une direction de l'axe est $\vec{i}+\vec{j}$ (vecteur propre pour la valeur propre 1 de $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$). Ainsi, g est le produit commutatif de l' homothétie de rapport 2 de centre G et de la symétrie par rapport à la droite passant par G de direction $\vec{i}+\vec{j}$.



Exercice 2

1) Si $f \in Sim(E)$ et si $g \in Sim^-(E)$, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude directe si f est directe et indirecte si f est indirecte. Comme les rapports d'homothéties se multiplient, le rapport est k. D'autre part, on a $g \circ f \circ g^{-1}(g(O)=g(O)$ et g(O) est point fixe.
2) Si on se place dans le plan euclidien, on peut orienter le plan. Si $f\in Sim^+(E)$, f est le produit commutatif d'une rotation de centre O et d'angle θ mod$[2\pi]$ et d'une

homothétie de rapport k et de même centre. Ainsi, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude directe de rapport k et de centre g(O).

* Si g est directe, g est une similitude d'angle α et de rapport k' . Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$, on a :

$$M(\vec{g} \circ \vec{f} \circ \vec{g}^{-1}) = k' \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times k \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times 1/k' \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

et l'angle de $g \circ f \circ g^{-1}$ est aussi θ mod$[2\pi]$.

* Si g est indirecte, g est une similitude d'axe D de rapport k' . Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$, formée de vecteurs propres de $\vec{g}$, on a :

$$M(\vec{g} \circ \vec{f} \circ \vec{g}^{-1}) = k' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times k \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times 1/k' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

et l'angle de $g \circ f \circ g^{-1}$ est - θ mod$[2\pi]$.

* f et g commutent si et seulement si $g \circ f \circ g^{-1} = f$. Par conséquent, si g est directe la condition est g(O) = O, si g est indirecte la condition est g(O) = O et $\theta = k\pi$ mod$[2\pi]$.

3)Si $f \in Sim^-(E)$, f est le produit commutatif d'une symétrie d'axe D et d'une homothétie de rapport k et de centre O porté par l'axe. Ainsi, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport k et de centre g(O).

Dans ce cas $g \circ f \circ g^{-1}(g(D)) = g(D)$ et g(D) est une droite globalement invariante de $g \circ f \circ g^{-1}$ et g(D) est soit l'axe de symétrie soit une droite orthogonale à l'axe de symétrie.

Si M est un point de D, $\vec{g} \circ \vec{f} \circ \vec{g}^{-1}(\overrightarrow{g(O)g(M)}) = k\,\overrightarrow{g(O)g(M)}$ et g(M) est un point de l'axe de symétrie de $g \circ f \circ g^{-1}$ et g(D) est l'axe de symétrie (si g(D) était orthogonale à l'axe de symétrie, on aurait trouvé $\vec{g} \circ \vec{f} \circ \vec{g}^{-1}(\overrightarrow{g(O)g(M)}) = -k\,\overrightarrow{g(O)g(M)}$).

* f et g commutent si et seulement si $g \circ f \circ g^{-1} = f$. Par conséquent, la condition est g(O) = O et g(D)=D.

Exercice 3

Puisque $(a_0, a_1, ..., a_n)$ est un repère de X et $(b_0, b_1, ..., b_n)$ une famille de n+1 points, il existe une unique application affine f de X telle que pour tout i dans {0,…, n}, $f(a_i) = b_i$. Montrons que c'est une isométrie.

Pour tout i et j dans {0,…, n}, on a $\|\overrightarrow{a_0a_i}\| = \|\overrightarrow{b_0b_i}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})\|$ d'une part et, de $\|\overrightarrow{a_ia_0} + \overrightarrow{a_0a_j}\|^2 = \|\overrightarrow{a_ia_0}\|^2 + \|\overrightarrow{a_0a_j}\|^2 - 2(\overrightarrow{a_0a_i}/\overrightarrow{a_0a_j}) = \|\overrightarrow{b_ib_0} + \overrightarrow{b_0b_j}\|^2$, on obtient:

$$(\overrightarrow{a_0a_i}/\overrightarrow{a_0a_j}) = (\overrightarrow{b_0b_i}/\overrightarrow{b_0b_j}) = (\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})/\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_j}))$$

Ainsi, $\vec{f}$ conserve la norme et le produit scalaire des vecteurs d'une base et f est une isométrie.

1)On considère la famille $(c_0, c_1, ..., c_n)$ définie par $c_0 = b_0$ et pour tout i dans {0,…, n}, $\overrightarrow{c_0c_i} = \overrightarrow{b_0c_i} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{b_0b_i}$. Alors, il existe une isométrie unique f qui transforme les a_i en c_i et si on note H l'homothétie de centre b_0 et de rapport μ , alors $H \circ f = s$ est une similitude transformant les a_i en b_{ii}.

L'unicité provient du fait que les points c_i sont images d'un repère.

2)On est dans la configuration précédente avec un point en moins. Puisque $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ est une famille affinement libre, elle constitue un repère de la VLA de dimension n-1, V engendrée par ces points ; $V = Aff\{ a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$.
L'orthogonal de $\vec{V}$ est une droite vectorielle et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de norme 1, il existe un points a_n tel que $\overrightarrow{a_0a_n} = \vec{u}$.
Compte tenu du point 2) il existe une similitude unique h de rapport μ et de V dans $W = Aff\{ b_0, b_1, ..., b_{n-1}\}$ qui transforme les points a_i en b_i. Ainsi, W est de dimension n-1 et l'orthogonal de $\vec{W}$ est une droite vectorielle et si $\vec{w}$ est un vecteur directeur de norme 1, il existe un point b_n tel que $\overrightarrow{b_0b_n} = \mu\vec{w}$ d'une part et il existe un point b'_n tel que $\overrightarrow{b_0b'_n} = -\mu\vec{w}$.
Les familles $\{ b_0, b_1, ..., b_n\}$et $\{ b_0, b_1, ..., b'_n\}$permettent de définir une similitude directe f et une similitude indirecte g . Elles sont uniques puisque les points b_n et b'_n sont uniques.

Exercice 4

On écrit les complexes a, b, z sous la forme analytique, soit $a = a_1+ia_2$, $b = b_1+ib_2$ et $z = x+iy$. Dans ces conditions, $M_R(f_{a,b}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & -a_2 \\ b_2 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ et ainsi $f_{a,b}$ est la matrice représentant une similitude de déterminant positif donc une similitude directe. On notera que si a =1, $f_{a,b}$ est une translation. Le rapport de similitude est le module de a et si $|a| = 1$, $f_{a,b}$ est une isométrie.
Réciproquement, si f est une similitude directe, la matrice représentant f dans le repère est de la même forme et on peut trouver deux complexes a et b tels que $f = f_{a,b}$.

Si f est une similitude indirecte, la matrice M_R (f) est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & a_2 \\ b_2 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ et par conséquent $f(z)=a\bar{z}+b$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z.

a) G est non vide, il contient l'application identique (a=1 et b=0) et la loi o est associative. Si a, b, c, d sont des complexes avec a et c $\neq 0$, alors pour tout z dans ç , on a $f_{a,b} \circ f_{c,d} (z) = f_{a,b} (cz+d)= acz +ad+b = f_{ac,ad+b} (z)$ et la loi o est une loi interne. D'autre part, la bijection réciproque de $f_{a,b}$ est $f_{1/a,-b/a}$ et G est un groupe (non commutatif).
T est non vide, il contient l'application identique. Si b, d sont des complexes alors pour tout z dans ç , on a $f_{1,b} \circ f_{1,d} (z) = f_{1,b} (z+d)= z +d+b = f_{1,b+d} (z)$ et par conséquent T est stable pour la loi o et la bijection réciproque de $f_{1,b}$ est $f_{1,-b}$. T est un sous groupe de G.
Si $f_{a,b}$ est dans G et $f_{1,d}$ est dans T alors $(f_{a,b})^{-1} \circ f_{1,d} \circ f_{a,b} = f_{1/a,-b/a} \circ f_{a,b+d} = f_{1,\, d/a}$ et par conséquent T est un sous groupe distingué de G.

b)Si z_1, z_2, z'_1 et z'_2 sont des complexes tels que $z_1 \neq z_2$ et $z'_1 \neq z'_2$, alors on recherche deux complexes $a \neq 0$ et b tels que $\begin{cases} az_1 + b = z_1' \\ az_2 + b = z_2' \end{cases}$.

Ce système est de Cramer, le déterminant est $z_1 - z_2$ et par conséquent il existe une solution unique du système $a = \dfrac{z_1 - z_2}{z'_1 - z'_2}$ ($\neq 0$) et $b = \dfrac{z_1 z_2' - z_2 z_1'}{z'_1 - z'_2}$.

c)Si $f_{a,b}$ n' est pas une translation, alors $a \neq 1$. On recherche un point z_0 tel que $f_{a,b}(z_0) = z_0 = a z_0 + b$ et ainsi $z_0 = b/(1-a)$ (on notera que les translations n'ont pas de point fixe).

d) On considère l'ensemble des similitudes directes admettant z_0 comme point fixe : $G_{z_0} = \{ f \in G \; ; \; f(z_0) = z_0 \}$.

G_{z_0} est non vide, il contient l'application identique (il ne contient pas de translations).

Si f et g sont dans G_{z_0} , $f \circ g^{-1}$ est aussi dans G_{z_0} et celui-ci est un sous groupe de G.

Montrons que G_{z_0} est commutatif :

Si $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ sont dans G_{z_0} alors $z_0 = b/(1-a) = d/(1-c)$ et par conséquent, $ad+b=cb+d$.

Comme $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$ et que $f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{ca,cb+d}$, les applications commutent.

e)Si H est un sous groupe commutatif de G, alors on a l'alternative : soit il est contenu dans T, soit il n'est pas contenu dans T.

Dans le second cas il contient au moins un élément de G qui n'est pas une translation. Ainsi il existe $f_{a,b}$ dans H tel que $a \neq 1$ et soit $z_0 = b/(1-a)$ le point fixe de $f_{a,b}$.Montrons qu'alors H est contenu dans G_{z_0} .

Si $f_{c,d}$ est dans H, alors $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b} = f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{ca,cb+d}$, et $ad+b=cb+d$. Ainsi, $f_{c,d}(z_0) = cb/(1-a)+d = b/(1-a) = z_0$.

f) Si f et g sont dans G, $fogof^{-1}og^{-1}$ est une similitude de rapport le produit des rapports donc c'est une isométrie.

Plus précisément, $f_{a,b} \circ f_{c,d} \circ f_{1/a,-b/a} \circ f_{1/c,-d/c} = f_{1,ad-bc}$ et on obtient une translation.

Si H est un sous groupe de G ne contenant aucune translation à l'exception de Id, alors si f et g sont dans H, $fogof^{-1}og^{-1}$ est aussi dans H et par conséquent $fogof^{-1}og^{-1}$ est l'unique translation Id. Ainsi, f et g commutent et H est commutatif.

Exercice 5

Sur la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$, on a la représentation matricielle :

$$M(\vec{R}_\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(\vec{R}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et par conséquent $\vec{R}_\alpha = \cos\alpha \, \vec{Id} + \sin\alpha \, \vec{R}$.

Partie 1

1)Si IJKL est un parallélogramme alors $(I, \vec{IJ}, \vec{IL})$ est un repère cartésien et si f est affine bijective, $(f(I), \vec{f}(\vec{IJ}), \vec{f}(\vec{IL}))$ est aussi un repère cartésien. D'autre part, la relation $\vec{IK} = \vec{IJ} + \vec{IL}$ implique $\vec{f}(\vec{IK}) = \vec{f}(\vec{IJ}) + \vec{f}(\vec{IL})$ et f(I)f(J)f(K)f(L) est un parallélogramme.

Si IJKL et I'J'K'L' sont deux parallélogrammes, il existe une unique bijection affine f transformant les repères correspondants. Cette bijection transforme aussi K en K' compte tenu des relations $\vec{IK} = \vec{IJ} + \vec{IL}$ et $\vec{I'K'} = \vec{I'J'} + \vec{I'L'}$.

2) $a \Rightarrow b$

Si f est une similitude directe, $\vec{f} = k\vec{u}$ avec k>0 et $\vec{u}$ rotation vectorielle. Alors si IJKL est un carré direct, son image est un parallélogramme d'après le point 1) et de plus $\| \vec{f}(\vec{IJ}) \| = k \| \vec{IJ} \|$ donc c'est un carré. Il est direct puisque f est directe.

b ⇒c

Soit IJKL un carré direct, alors $(I, \vec{IJ}, \vec{IL})$ est un repère carré direct et son image aussi. Alors :

$\vec{f} \circ \vec{R}(\vec{IJ}) = \vec{f}(\vec{IL})$ et $\vec{R} \circ \vec{f}(\vec{IJ}) = \vec{f}(\vec{IL})$ et aussi $\vec{f} \circ \vec{R}(\vec{IL}) = -\vec{f}(\vec{IJ}) = \vec{R} \circ \vec{f}(\vec{IL})$

La propriété de commutativité étant vérifiée pour les vecteurs de la base, on en déduit que $\vec{f}$ et $\vec{R}$ commutent.

c ⇒d

Soit IJKL un carré direct, alors $(I, \vec{IJ}, \vec{IL})$ est un repère carré direct et l'on a :

$\vec{f} \circ \vec{R}(\vec{IJ}) = \vec{f}(\vec{IL}) = \vec{R} \circ \vec{f}(\vec{IJ})$ et f(I)f(J)f(K)f(L) est un carré direct.

d ⇒a

f transforme un repère orthonormé direct $(I, \vec{IJ}, \vec{IL})$ en un repère orthogonal direct et de plus $\| \vec{f}(\vec{IJ}) \| = \| \vec{f}(\vec{IL}) \| = k \| \vec{IJ} \| = k \| \vec{IL} \|$.

Ainsi f est une similitude directe (de rapport k).

3)On montre de façon identique au point précédent (au signe près) l'équivalence des propositions suivantes :

a') f est une similitude indirecte.

b') Il existe un carré direct dont l'image par f est un carré indirect.

c') $\vec{f} \circ \vec{R} = -\vec{R} \circ \vec{f}$.

d')L'image par f de tout carré direct est un carré indirect.

4) Le repère étant non carré, les vecteurs considérés sont non nuls. On a les relations :

$\vec{R}(\vec{u} + \vec{R}(\vec{v}) = \vec{R}(\vec{u}) - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{R}(\vec{u}))$ et $\vec{R}(\vec{u} - \vec{R}(\vec{v}) = \vec{R}(\vec{u}) + \vec{v} = \vec{v} + \vec{R}(\vec{u})$.

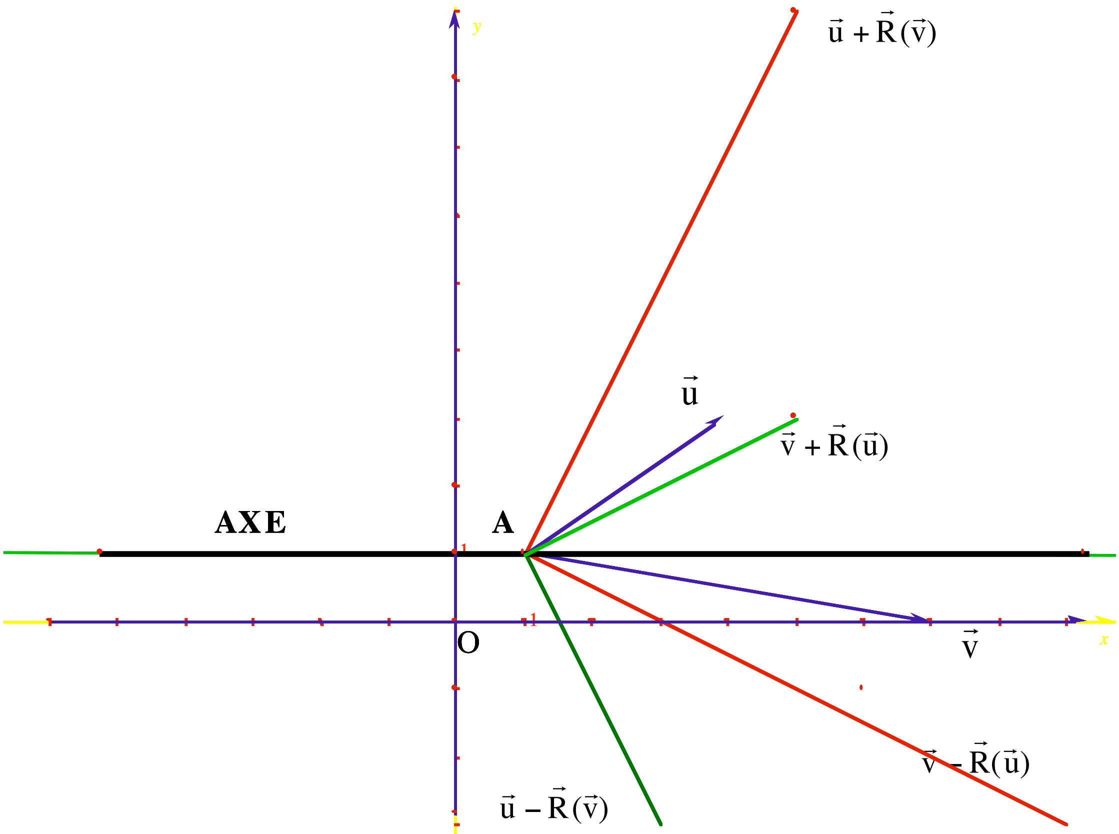
Ainsi $(A, \vec{u} + \vec{R}(\vec{v}), \vec{v} - \vec{R}(\vec{u}))$ est un repère carré indirect et $(A, \vec{u} - \vec{R}(\vec{v}), \vec{v} + \vec{R}(\vec{u}))$ est un repère carré direct. Ainsi il existe une similitude indirecte qui transforme le premier repère en le second.

Le rapport de similitude est $\rho = \dfrac{\| \vec{u} - \vec{R}(\vec{v}) \|}{\| \vec{u} + \vec{R}(\vec{v}) \|}$, A étant un point fixe, l'axe de réflexion (symétrie) est dirigé par le vecteur $\vec{u} + \vec{R}(\vec{v}) + \dfrac{1}{\rho}(\vec{u} - \vec{R}(\vec{v}))$.

Application :

$\vec{u}(3, 2), \vec{v}(3, 2), \vec{u} + \vec{R}(\vec{v})(4, 8), \vec{u} - \vec{R}(\vec{v})(2, -4), \vec{v} + \vec{R}(\vec{u})(4, 2), \vec{v} - \vec{R}(\vec{u})(8, -4)$,

ρ =1/2 et l'axe est parallèle à l'axe des x, de direction $\vec{i}$.



Partie 2

1) a) Si $\vec{u}$ est un endomorphisme de $\vec{E}$, alors :

$$\sigma\circ\sigma(\vec{u})=\vec{R}\circ\vec{R}\circ\vec{u}\circ\vec{R}^{-1}\circ\vec{R}^{-1}=-\vec{Id}\circ\vec{u}\circ-\vec{Id}=\vec{u}$$

σ est involutive.

b) On vérifie que σ est une application linéaire de End($\vec{E}$) et comme elle est involutive, c'est une symétrie vectorielle de End($\vec{E}$).

Ainsi, End($\vec{E}$) = Ker(σ+Id)$\oplus$ Ker(σ-Id) les projecteurs associés étant 1/2(Id+σ) et 1/2(Id-σ) (Id désigne l'application identique de End($\vec{E}$)).

La relation $\vec{u}\in$Ker(σ-Id) est équivalente à $\sigma(\vec{u})=\vec{u}$ et par conséquent à $\vec{u}$ et $\vec{R}$ commutent et ainsi Ker(σ-Id)=S^+. On montre de façon analogue que Ker(σ+Id)=S^-.

c) Compte tenu de la partie 1, S^+ (resp. S^-) est composé de l'application nulle et des similitudes vectorielles directes de $\vec{E}$ (resp. indirectes).

(ce résultat est remarquable et caractéristique de la dimension 2)

2) a) Si $\vec{u}$ est un endomorphisme de $\vec{E}$ alors comme End($\vec{E}$) = $S^+\oplus S^-$ $\vec{u}$ se décompose en la somme d'un élément de S^+ et d'un élément de S^-. Ainsi il existe deux réels γ et δ , une rotation $\vec{R}_\theta$ d'angle τ et une réflexion $\vec{S}$ tels que $\vec{u}=\delta\vec{R}_\theta+\gamma\vec{S}$.

Compte tenu de la remarque introductive, $\vec{R}_\theta=\cos\theta\vec{Id}+\sin\theta\vec{R}$ et par conséquent on a la décomposition : $\vec{u}=\alpha\vec{Id}+\beta\vec{R}+\gamma\vec{S}$.

Cette décomposition en général n'est pas unique puisque $\gamma\vec{S}=(-\gamma)(-\vec{S})$. Si $\vec{u}$ est un endomorphisme de S^+ alors $\vec{u}=k\vec{R}_\theta$ avec k rapport de similitude et θ angle de la rotation. Ainsi dans ce cas il y a unicité de la décomposition.

b) Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe dont le premier vecteur est invariant par $\vec{S}$ alors :

$$M(\vec{u}) = M(\alpha\vec{Id} + \beta\vec{R} + \gamma\vec{S}) = \begin{bmatrix} \alpha+\gamma & -\beta \\ \beta & \alpha-\gamma \end{bmatrix}$$

Le déterminant est $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ et le polynôme caractéristique est $X^2-2\alpha X+ \alpha^2+\beta^2-\gamma^2$.

c)La base étant orthonormée, $\vec{u}$ est symétrique si et seulement si la matrice est symétrique soit $\beta = 0$. Dans ce cas la matrice est diagonale, les valeurs propres sont $\alpha+\gamma$ et $\alpha-\gamma$ et la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de vecteurs propres.
