Chapitre IX- LES QUADRIQUES AFFINES

Si X est un espace affine de dimension finie et si un repère cartésien est donné, les hyperplans de X correspondent aux fonctions polynômes du premier degré par rapport aux coordonnées.
Que peut-on dire des fonctions polynômes du second degré ? Le but de ce chapitre est de répondre à cette question.

1) Les formes 2-affines.

Soient $(X, \vec{X})$ un espace affine sur € et $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de X. Un point m de X, de coordonnées $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ dans le repère R, est représenté par la matrice unicolonne $M = {}^t[\,1\ m_1\ m_2, \ldots, m_n]$.
Une forme 2-affine σ est une application qui à un point m de X associe le réel défini par :

$$\sigma(m) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} m_i m_j + 2\sum_{i=1}^{i=n} b_i m_i + c$$

avec $a_{i,j} = a_{j,i}$ et les $a_{i,j}$ non tous nuls.

On constate que σ apparaît comme une fonction polynomiale du second degré par rapport aux coordonnées. A une telle fonction, on associe toujours les matrices symétriques A et B ci-dessous, de façon que :

$$\sigma(m) = {}^tMBM.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & .. & .. & a_{1,n} \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n,1} & .. & .. & a_{n,n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 & .. & b_n \\ b_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & .. & .. & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,1} & .. & .. & .. & a_{2,n} \\ .. & .. & .. & a_{i,j} & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ b_n & .. & .. & a_{i,n} & .. & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

La matrice A est symétrique, elle représente la matrice d'une forme quadratique q non identiquement nulle de $\vec{X}$ sur la base e. On notera que si on vectorialise X en un point O, une forme 2-affine est la donnée d'une forme quadratique qui ne s'annule pas sur $\vec{X}$.

2) Les quadriques affines de X.

Si σ est une forme 2-affine sur X, définie sur un repère cartésien $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, on appelle quadrique, l'ensemble des points $\sigma^{-1}(\{0\})$, c'est à dire avec les notations précédentes l'ensemble des points m de X, tels que $\sigma(m) = {}^tMBM = 0$ (m est représenté par la matrice unicolonne ${}^t[\,1, m_1, m_2, \ldots\ldots m_n] = M$.)

On peut faire trois remarques :

a) $\sigma^{-1}(0)$ peut être vide (penser au cas n>2 et $m_1^2+m_2^2+1=0$).
b) $\sigma^{-1}(0)$ est indépendant du repère.

En effet, si B' est la matrice représentant σ sur un repère R' alors $B' = {}^tPBP$ avec P matrice de changement de repère donc inversible.

c) Des fonctions proportionnelles donnent le même ensemble.
Si $\sigma = t\sigma'$ avec t réel, alors $\sigma^{-1}(\{0\}) = \sigma'^{-1}(\{0\})$.

Définition: Si σ est une forme 2-affine sur X , on dit que l'équation $\sigma(m) = 0$ définit une quadrique affine de X. L'ensemble $\sigma^{-1}(0)$ est la quadrique définie par σ.

3) Simplification de l'équation.

Cette simplification est une conséquence classique de l'existence de bases orthogonales pour les formes quadratiques.

Si σ est une forme 2-affine sur X représentée par les matrices A et B sur le repère R, alors il existe une base e' orthogonale pour la forme quadratique q représentée par la matrice A. On envisage deux cas:

a) Si A est inversible, q est non dégénérée, on dit que la quadrique est à centre.

On peut choisir un repère $R' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ de telle façon que la représentation de σ dans ce repère est:

$$\sigma'(m) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i m'^2_i + c'$$

La matrice de changement de repère est de la forme :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ q_{2,1} & .. & .. & q_{2,n+1} \\ .. & .. & .. & .. \\ q_{n+1,1} & .. & .. & q_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

avec ${}^tQAQ$ matrice diagonale.
La première colonne correspondant au changement d'origine. On rappelle que Q peut être choisie orthogonale et dans ce cas, e' est aussi une base orthonormée. Dans ce cas a_i est la valeur propre associée au vecteur propre e'_i.

On rappelle que si (s, t) est la signature de q, alors ${}^tQAQ$ possède s termes positifs et t termes négatifs sur la diagonale.

Cette transformation s'appelle la recherche des axes et centres de symétrie de la quadrique.

b) Si A n'est pas inversible, q est dégénérée, on dit que la quadrique n'est pas à centre.

Dans ce cas la signature (s, t) de q vérifie s+t < n . On note k = n-s-t la dimension du noyau.

On peut choisir un repère $R' = (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ de telle façon que la représentation de σ dans ce repère soit :

$$\sigma'(m) = \sum_{i=1}^{i=n-k} a_i m'^2_i + \sum_{i=n-k+1}^{i=n} a_i m'_i + c'$$

Exemple:

On se place en dimension 2, on note x et y les coordonnées d'un point dans un repère cartésien orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et on étudie les coniques définies par leurs équations notées (E).

a) $\mathbf{2x^2+2y^2+2xy+4x-2y-6 = 0}$ **(E)**

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

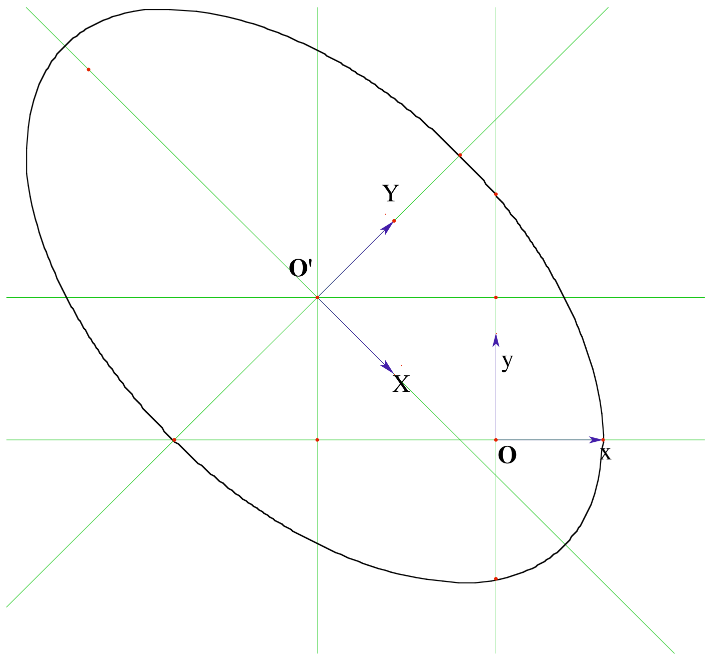
* A a deux valeurs propres 1 et 3, sa signature est (2,0), il s'agit d'une conique à centre.

* Une base de vecteurs propres orthonormée est $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.
* recherche du centre de symétrie :

On cherche α et β tels que si l'on pose x = X+ α et y = Y+β, l'équation en X et Y n'a pas de termes du premier degré. On trouve α = -5/3 et β = 4/3 et ainsi la constante devient -32/3.

* le centre de symétrie et la base orthonormée de vecteurs propres donne un repère orthonormé, la matrice de changement de repère est donc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Dans le nouveau repère l'équation de la conique est $X^2+3Y^2 - 32/3 = 0$, c'est l'équation d'une ellipse.

b) **$x^2+y^2+2xy+2x-2y+2 = 0$ (E)**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

* A a deux valeurs propres, 0 et 2, sa signature est (1,0), il s'agit d'une conique dégénérée.

* une base de vecteurs propres orthonormée est $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

* recherche d'un point appartenant à l'axe de symétrie :

On pose $x = X+\alpha$ et $y = Y+\beta$, l'équation en X et Y devient:

$X^2+Y^2+2XY+(2\alpha+2\beta+2)X+(2\alpha+2\beta-2)Y+\alpha^2+b^2+2\alpha\beta+2\alpha-2\beta+2 = 0$

$(X+Y+\alpha+\beta)^2+2(X-Y)+2\alpha-2\beta+2=0$

si on choisit $\alpha=1$ et $\beta=-1$, le point est sur l'axe de symétrie et la constante est 6.

* le point choisi et la base orthonormée de vecteurs propres donne un repère orthonormé, la matrice de changement de repère est donc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

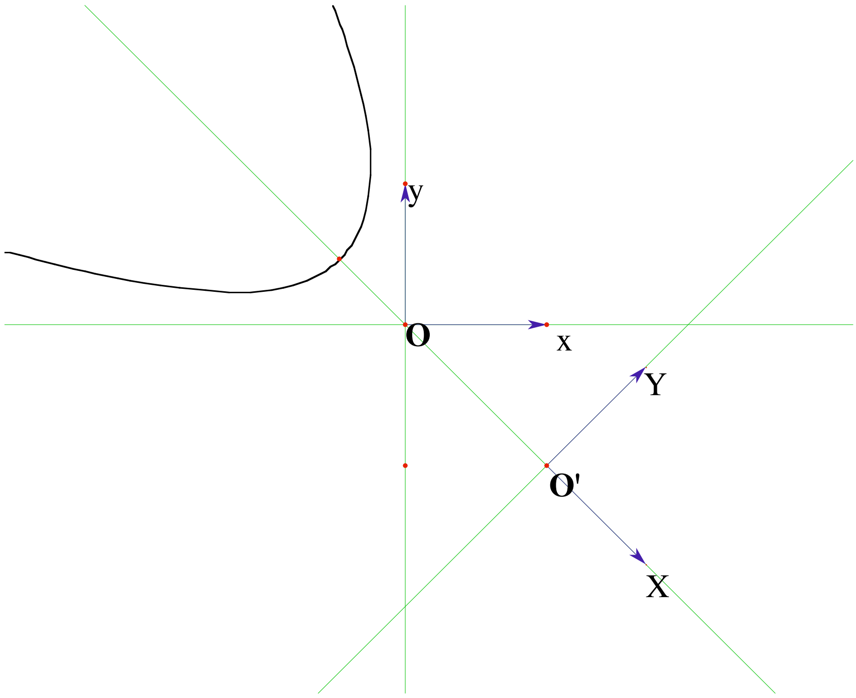
On fait le changement de repères :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

On obtient la matrice :

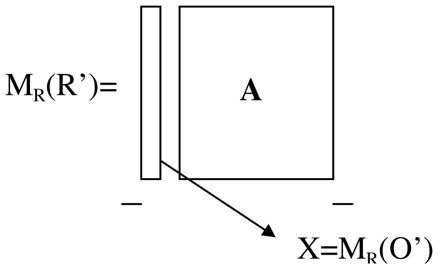
$$\begin{bmatrix} 6 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

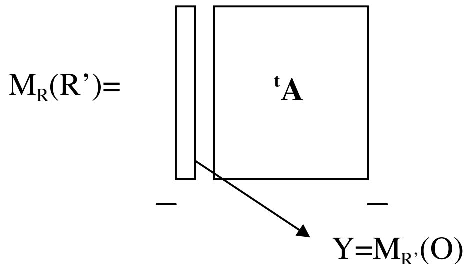
Dans le nouveau repère l'équation de la conique est $2Y^2+2\sqrt{2}X+6=0$, c'est l'équation d'une parabole.



Remarque:
Contrairement au cadre vectoriel, l 'inverse d'une matrice de changement de repères cartésiens orthonormé n'est pas égale à sa matrice transposée. La différence vient du fait que la première colonne de la matrice de changement de repères est l'image de l'origine dans le repère.
Plus précisément, si $R' = (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ et $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, alors :

1 1





Avec la relation $Y=-{}^tAX$.

4) Etude des quadriques en dimension 2 et 3

A) X est le plan affine euclidien :

Dans ce cas les quadriques sont appelées coniques.

Le tableau ci-dessous donne les différents types de coniques possibles en fonction de det(A) et de det(B) et de la signature de la forme quadratique. Ce tableau permet de caractériser presque tous les types de coniques.

L'équation réduite est obtenue à partir d'un changement de repère orthogonal mais non orthonormé.

Il faut noter que si le changement de repère était orthonormé, les valeurs propres de la matrice A apparaîtraient devant les termes carrés.

Signature	**Rang de B**	**detA**	**detB**	**Equation réduite**	**Représentation**
1,0	1	0	0	$x^2=0$	**une droite double**
1,1	2	< 0	0	$x^2-y^2=0$	**2 droites doubles**
2,0	2	>0	0	$x^2+y^2 = 0$	**un point**
0,1 1,0	2	0	0	$-y^2 = \pm 1$ $x^2 = \pm 1$	**vide** **2 droites parallèles**

0,2	3	>0	$\neq 0$	$-x^2 - y^2 = \pm 1$	**vide ou ellipse**
1,1	3	<0	$\neq 0$	$x^2 - y^2 = \pm 1$	**hyperbole**
2,0	3	>0	$\neq 0$	$x^2 + y^2 = \pm 1$	**vide ou ellipse**
1,0	3	0	$\neq 0$	$x^2 = y$	**parabole**

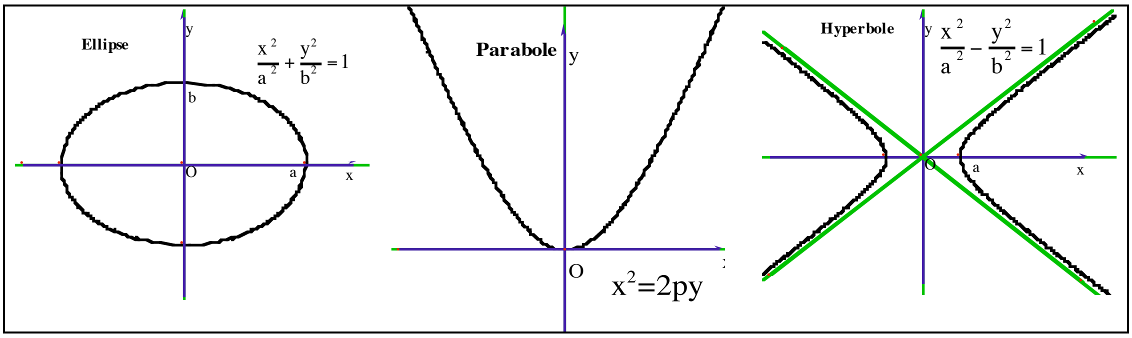
Remarques :

1) En choisissant convenablement un repère, une ellipse a l'air d'un cercle et une hyperbole a l'air d'une hyperbole équilatère mais aucun changement de repère ne pourra transformer une ellipse en hyperbole.

2) Les coniques sont connues depuis longtemps, Appolonius (2 siècles avant J.C.) aurait démontré que les sections planes d'un cône de révolution étaient des coniques (d'où leur noms).

Forme des trois types de coniques non vides:

La représentation graphique des trois types de coniques non vide est la suivante :



B) X est l'espace affine euclidien de dimension 3.

Nous nous bornons ici à indiquer les types de quadriques non vides et non dégénérées, l'équation réduite est exprimée sur un repère orthogonal non normé.

Signature	**Equation réduite**	**représentation**

(2,1)	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	Hyperboloïde une nappe
(1,2)	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	Hyperboloïde deux nappe
(3,0)	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	Ellipsoïde
(2,0)	$x^2 + y^2 = z$	Paraboloïde elliptique
(1,1)	$x^2 - y^2 = z$	Paraboloïde hyperbolique

L'étude des sections des images par des plans parallèles aux plans de coordonnées explique leur nom.

Par exemple, pour l'avant dernier, la trace du paraboloïde elliptique sur un plan d'équation $z = c > 0$ est une ellipse $x^2+y^2 = c$ et sa trace sur un plan d'équation $x = a$ est une parabole $y^2 = z - a^2$.

Cylindres et cônes .

Soient P un plan affine de l'espace affine euclidien X et (Γ) une conique non vide définie dans P.

On considère un vecteur $\vec{u}$ n'appartenant pas à $\vec{P}$ et un point A n'appartenant pas à P.

On appelle **cylindre** de direction $\vec{u}$ et de base (Γ) l'union des droites ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par un point de (Γ).

On appelle **cône** de sommet A et de base (Γ) l'union des droites passant par A et par un point de (Γ).

On peut noter que les conditions $\vec{u}$ n'appartient pas à $\vec{P}$ et A n'appartient pas à P permettent d'affirmer que les droites ainsi définies ne sont pas dan le plan P.

* *Les cônes et les cylindres sont des quadriques affines.*

On choisit un repère cartésien orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace X tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère cartésien du plan P.

Dans R, une équation du plan est $z = 0$, une équation de la conique est $\sigma(x, y)=0$ et $z = 0$, $\vec{u}$ est de coordonnées (u_1, u_2, u_3) et A de coordonnées (a_1, a_2, a_3) (avec la condition $u_3 \neq 0$ et $a_3 \neq 0$) .

Une équation du cylindre de direction $\vec{u}$ et de base (Γ) est $\sigma(x - \frac{u_1}{u_3}z,\ y - \frac{u_2}{u_3}z) = 0$, équation d'une quadrique affine.

Une équation du cône de sommet A et de base (Γ) est $\sigma(\frac{xa_3 - a_1 z}{a_3 - z}, \frac{ya_3 - a_2 z}{a_3 - z}) = 0$, équation d'une quadrique affine.

* *Exemple*.

On suppose que P est d'équation $x+y+z=1$, que (Γ) est la conique d'équation $x^2+y^2=1$ et $x+y+z=1$, $\vec{u}(1, 1, 0)$ et A $(1, 1, 1)$.

** Equation du cylindre : Si M(x, y, z) est un point du cylindre, la droite passant par M et de direction $\vec{u}$, coupe (Γ) en M'(x', y', z') et $\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{u}$. Ainsi on a les relations: $x' - x = \lambda = y' - y$, $z' = z$ et en sommant $1-(x+y+z) = 2\lambda$.

Ainsi, x' = x+ λ = (x-y-z+1)/2 , y'= (-x+y-z+1)/2 et une équation du cylindre est $(x-y-z+1)^2+(-x+y-z+1)^2 = 4$, soit $(x-y)^2+(z-1)^2 = 2$.

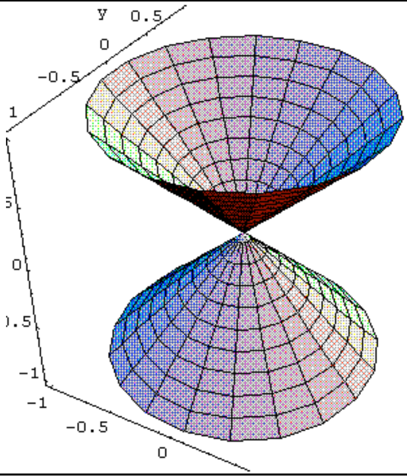
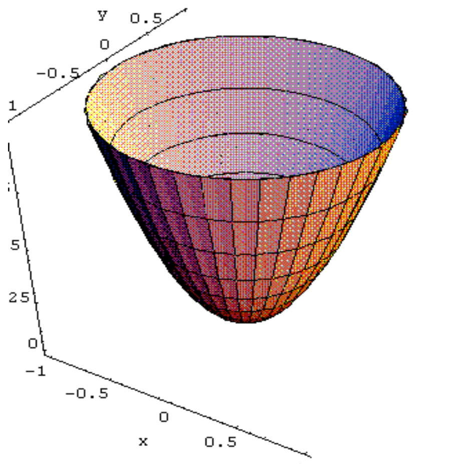
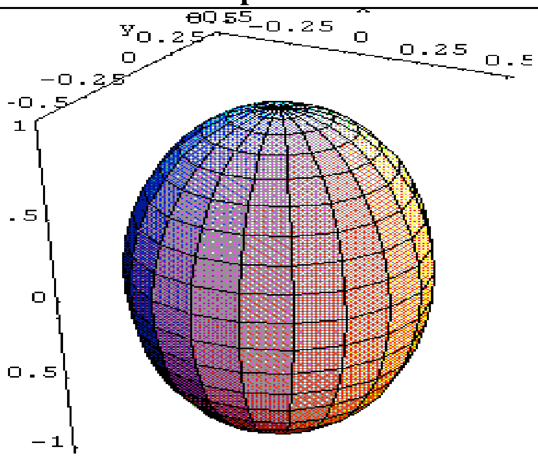
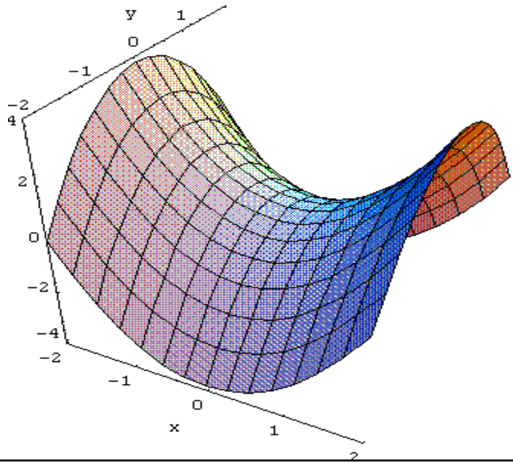
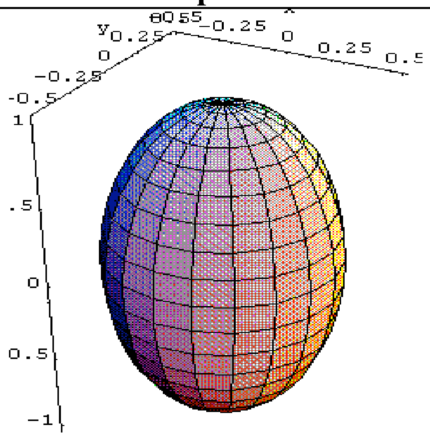
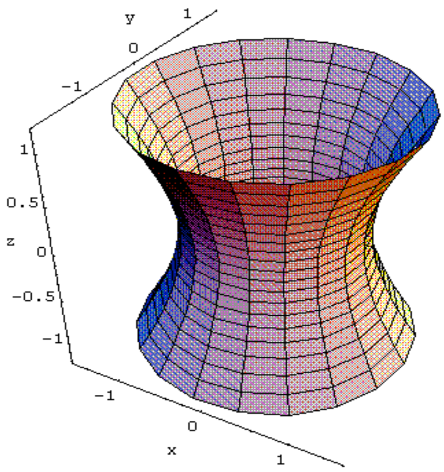
** Equation du cône : Si M(x, y, z) est un point du cône, la droite passant par M et par A coupe (Γ) en M'(x', y', z') et $\overrightarrow{MM'} = \lambda \overrightarrow{AM'}$. Ainsi on a les relations: x'-x = λ(x'-1), y'-y = λ(y'-1), z'-z = λ(z'-1), et 1-(x+y+z)= -2λ.

Ainsi, $x' = \dfrac{x-\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{1+x-y-z}{3-x-y-z}$, $y' = \dfrac{1-x+y-z}{3-x-y-z}$ et une équation du cône est $(x-y-z+1)^2+(-x+y-z+1)^2 = (3-x-y-z)^2$.

Directions asymptotiques:

Les directions asymptotiques d'une quadrique d'équation sont les droites vectorielles engendrées par des vecteurs u tels que q(u)=0. Pour n=3, l'ellipsoïde est la seule quadrique sans direction asymptotique. Les directions asymptotique de l'un quelconque des hyperboloïdes forment un cône.

PRINCIPALES QUADRIQUES EN DIMENSION TROIS

Hyperboloïde à deux nappes	**Paraboloïde**
	
Sphère	**Paraboloïde hyperbolique**
	
Ellipsoïde	**Hyperboloïde à une nappe**
	

Exercices du chapitre IX

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan affine euclidien on considère la droite variable (D) d'équation cartésienne :

$$m^2y + 2mx + 2a = 0$$

où a est une constante réelle non nulle et m un paramètre non nul.

a) Discuter le nombre de droites passant par un point A du plan. Décrire l'ensemble des points A par lesquels passent deux droites confondues.

b) Décrire l'ensemble des points A par lesquels passent deux droites perpendiculaires.

Exercice 2

Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'un plan affine euclidien X.

1) Dans ce repère, on définit la famille des courbes C_m, dépendant du paramètre réel m, par leur équation :

$$(C_m) \quad 2mx^2 - 8mx - (m-1)\, y^2 + 12m - 2 = 0 .$$

a) Discuter, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe C_m.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles C_m est :

i) un cercle (d' équation $x^2 + y^2 = A^2$).

ii) une hyperbole équilatère (équation $x^2 - y^2 = \pm A^2$).

2) Déterminer une équation réduite de la courbe définie dans R par :

$$x^2 + y^2 + 4xy - 6x + 6y + 9 = 0 .$$

Exercice 3

On donne n droites dans le plan affine euclidien. Montrer que l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances à ces droites est constante est en général une ellipse. (penser aux formes définies positives)
Un repère orthonormé étant choisi, quel est l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux trois droites d'équation ci-dessous est constante:

$$y = x, \quad y = -x \text{ et } y = 1$$

On discutera suivant les valeurs de la constante.

Exercice 4

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 , rapporté à un repère cartésien orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le cône (C) d'équation:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

a) Que représente l'intersection de (C) avec le plan d'équation $x+y+z = 1$?
b) Que représente l'intersection de (C) avec le plan d'équation $x+y = 1$?
c)Que représente l'intersection de (C) avec le plan d'équation $y+z = 1$?
d)Que représente l'intersection de (C) avec le plan d'équation $y+2z = 1$?

Exercice 5

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 , rapporté à un repère cartésien orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les quadriques d'équation :

$$x^2 + 6y^2 - 8zx - 4xy + 2x + 4y - 14z - 3 = 0$$

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 8zy - 4xy + 2y - 2z + 1 = 0 .$$

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2zy - 2xz - 2xy - a = 0 .$$

$$x^2 + 2azy - 2bx = 0 .$$

Quelle est la nature de ces quadriques ?

Exercice 6

Soit E un espace affine euclidien de dimension n, et R un repère affine. Ecrire l'équation générale d'une quadrique dans ce repère, appelée équation barycentrique de la quadrique.

a) On se place dans le plan affine et on considère le repère affine R = (A, B, C). Montrer que l'équation barycentrique d'une conique passant par les trois points du repère est de la forme :

$$ayz + bxz + gxy = 0$$

b) On se place dans l'espace affine et on considère le repère affine R = (A, B, C, D).Montrer que l'équation barycentrique d'une quadrique passant par les quatre points du repère est de la forme :

$$axt + byt + czt + dyz + exz + fxy = 0$$

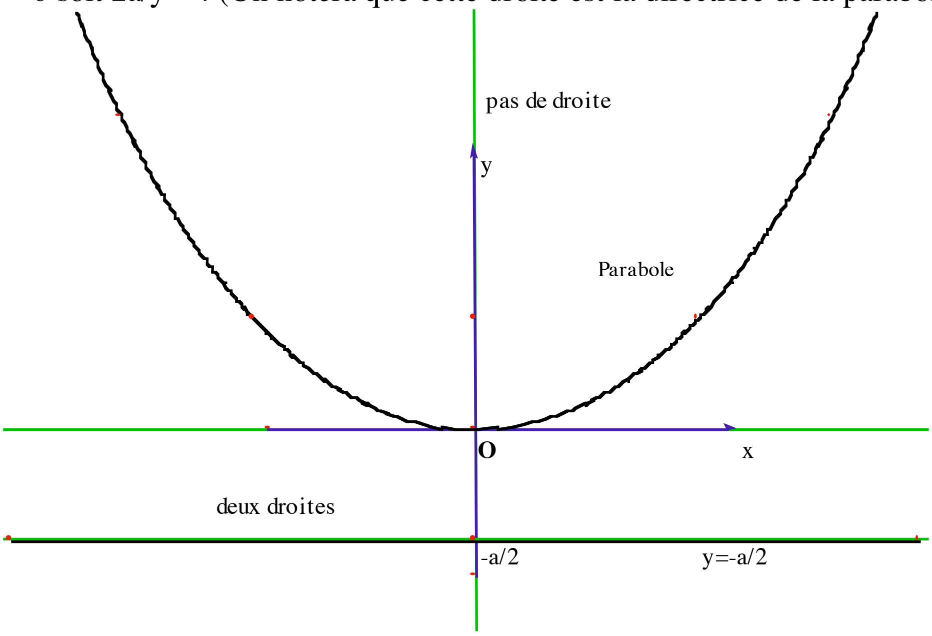
Solutions des exercices du chapitre IX

Exercice 1

a) On peut remarquer que puisque $a \neq 0$, l'origine O du repère n'est sur aucune droite de la famille. Soit A un point distinct de O, de coordonnées (x, y) dans le repère. Si (D_m) est une droite passant par A, alors $m^2y+2mx+2a = 0$, équation du second degré en m dont 0 n'est pas racine.

* Si $x^2-2ay < 0$, l'équation n'a pas de racine, il n'y a pas de droite passant par A.
* Si $x^2-2ay > 0$, et $y \neq 0$ l'équation n'a pas de racine, il y a deux droites passant par A ($m = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2-2ay}}{y}$).
* Si $x^2-2ay > 0$, et $y = 0$ il y a une droite passant par A ($m = -a/x$).
* Si $x^2-2ay = 0$, l'équation a une racine double, il y a une droite (double)passant par A ($m=-x/y$). L'ensemble des points A où passent deux droites confondues est l'ensemble des points de la parabole d'équation $x^2 = 2ay$ privée du point O.

b) Si A(x, y) est un point où passent deux droites perpendiculaires, alors $x^2-2ay > 0$, et $y \neq 0$ et si m_1 et m_2 sont les valeurs de m correspondant a ces droites, il faut et il suffit que $m_1m_2+4 = 0$ soit $2a/y=-4$ (On notera que cette droite est la directrice de la parabole).



Exercice 2

1) a)On cherche l'équation réduite de la conique en utilisant la méthode de Gauss :

$$2mx^2-8mx-(m-1)\,y^2+12m-2 = 2m(x-2)^2-(m-1)y^2+4m-2 = 0.$$

Ainsi, on peut représenter les résultats sous la forme du tableau ci-dessous :

m	**-∞**	**0**	**1/2**	**1 +∞**
(1-2m)/m	-	+	-	-
(1-2m)/(m-1)	-	-	+	-

forme	hyperbole	ellipse	vide	hyperbole

Si m=0 on a deux droites, $y=\pm\sqrt{2}$
Si m=1 alors on a $(x-2)^2=-1$, c'est l'ensemble vide.
Si m=1/2 alors un point, x=2 et y=0.

b) i) On a un cercle si et seulement si 0<m<1/2 et (1-2m)/m=2(1-2m)/(1-m) soit m=1/3 ($x^2+y^2=1$).

ii)On a une hyperbole équilatère si et seulement si m<0 ou m>1 et (1-2m)/m=-2(1-2m)/(1-m) soit m=-1 ($-x^2+y^2=3$).

2*) Equation réduite de la courbe définie dans R par* : $x^2+y^2+4xy-6x+6y+9 = 0$.
On a :

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

* A a deux valeurs propres, -1 et 3, sa signature est (1,1), il s'agit d'une conique à centre.

* Une base de vecteur propres orthonormée est $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

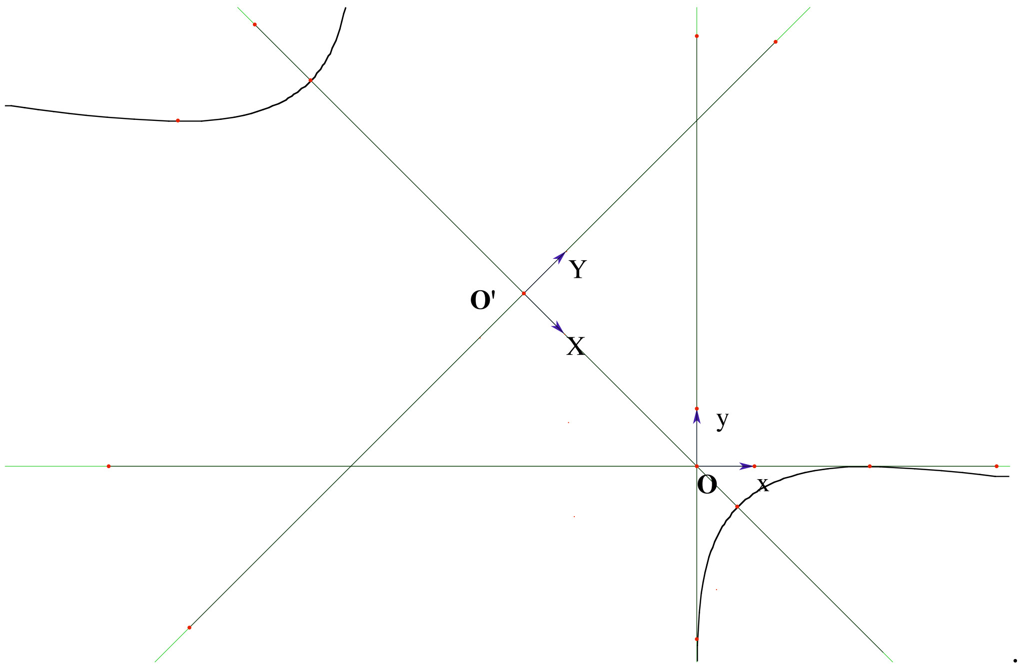
* Recherche du centre de symétrie:

On cherche α et β tels que si l'on pose $x=X+\alpha$ et $y=Y+\beta$, l'équation en X et Y n'a pas de termes du premier degré. On trouve $\alpha = -3$ et $\beta = 3$ et ainsi la constante devient 27.

* le centre de symétrie et la base orthonormée de vecteurs propres donnent un repère orthonormé, la matrice de changement de repère est donc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dans le nouveau repère l'équation de la conique est $-X^2+3Y^2+27=0$, c'est l'équation d'une hyperbole



Exercice 3

On considère un repère cartésien orthonormé R et par conséquent on peut représenter les droites par n équations :

$$a_ix+b_iy+c_i=0;\ \text{ avec } i=1,\dots,n.$$

On note K la constante et si un point M de coordonnées (x, y) dans le repère est dans l'ensemble, alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(a_ix+b_iy+c_i)^2}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}=K.$$

(On notera que le dénominateur n'est pas nul, sinon les coefficients seraient tous nuls et on n'aurait pas une équation de droite)

On est par conséquent ramené à l'étude d'une forme 2-affine dans le plan.

Si on développe les carrés, on obtient pour partie quadratique:

$$x^2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i^2}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}+y^2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{b_i^2}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}+2xy\sum_i\frac{a_ib_i}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}$$

comme les a_i et les b_i ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple qu'il existe un a_i non nul. et ainsi, en utilisant la méthode de Gauss on obtient:

$$\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2\left(x+y\frac{\sum_i a_ib_i}{\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2}\right)^2+\frac{\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2\sum_{i=1}^{i=n}b_i^2-(\sum_{i=1}^{i=n}a_ib_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2}y^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la quantité $\sum_{i=1}^{i=n}a_i^2\sum_{i=1}^{i=n}b_i^2-(\sum_{i=1}^{i=n}a_ib_i)^2$ est positive ou nulle et est nulle si et seulement si il existe η tel que pour tout i $a_i=\eta\, b_i$ (dans ce cas les droites sont parallèles).

Ainsi dans le cas général la partie quadratique est définie positive et l'ensemble est soit vide soit une ellipse.

Application : Compte tenu des équations des droites, on obtient :

$$(y-x)^2+(y+x)^2+(y-1)^2=K \text{ et } 2x^2+3y^2-2y+1=K$$

Ainsi l'équation réduite est $2x^2+3(y-1/3)^2 = K-2/3$ et l'ensemble est une ellipse si $K>2/3$, une ellipse réduite à un point si $K=2/3$ et vide sinon.

Exercice 4

Pour connaître l'équation de l'intersection du cône avec un plan, il faut faire un changement de repère de façon que le nouveau repère soit composé d'un repère du plan et que l'équation de celui-ci soit de la forme $Z = 0$.

a) Un repère cartésien non orthonormé du plan d'équation $x+y+z=1$ est par exemple $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec A de coordonnées (1, 0, 0) dans le repère R, $\vec{u}$ de coordonnées (1, -1, 0) et $\vec{v}$ de coordonnées (0, 1, -1). Soit donc le nouveau repère R'= $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ et si m est un point de l'espace, on représente le point m par les matrices unicolonnes :

$$M_R(m) = {}^t[1 \ x \ y \ z] \text{ et que } M_{R'}(m) = {}^t[1 \ X \ Y \ Z]$$

La formule de changement de repères donne les relations entre les coordonnées.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{et ainsi} \begin{cases} x = 1 + X \\ y = -X + Y \\ z = -Y + Z \end{cases}$$

Dans le repère R', l'équation du plan est $Z=0$, l'équation du cône est $2X^2-Z^2+2YZ-2XY+2X=-1$.

L'équation de l'intersection dans le repère du plan est donc $2X^2-2XY+2X=-1$.

La signature de la forme quadratique associée est (1, 1), la constante est non nulle et par conséquent dans le plan l'intersection est une hyperbole.

b) Un repère cartésien non orthonormé du plan d'équation $x+y =1$ est par exemple $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec A de coordonnées (1, 0, 0) dans le repère R, $\vec{u}$ de coordonnées (1, -1, 0) et $\vec{v}$ de coordonnées (0, 1, 1). Soit donc le nouveau repère R'= $(A, \vec{k}, \vec{u}, \vec{v})$ et si m est un point de l'espace, on représente le point m par les matrices unicolonnes :

$$M_R(m) = {}^t[1 \ x \ y \ z] \text{ et que } M_{R'}(m) = {}^t[1 \ X \ Y \ Z]$$

La formule de changement de repères donne les relations entre les coordonnées.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{et ainsi} \begin{cases} x = 1 + Y \\ y = -Y + Z \\ z = X + Z \end{cases}$$

Dans le repère R', l'équation de l'intersection dans le repère du plan est donc $2Y^2-X^2+2Y=-1$.

La signature de la forme quadratique associée est (1, 1), la constante est non nulle et par conséquent dans le plan l'intersection est une hyperbole.

c) Un repère cartésien non orthonormé du plan d'équation $y+ z =1$ est par exemple $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec A de coordonnées (0, 1, 0) dans le repère R, $\vec{u}$ de coordonnées (1, 0, 0) et $\vec{v}$ de coordonnées (0, 1, -1). Soit donc le nouveau repère R'= $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ et si m est un point de l'espace, on représente le point m par les matrices unicolonnes :

$$M_R(m) = {}^t[1\ x\ y\ \ z] \text{ et que } M_{R'}(m) = {}^t[1\ X\ Y\ \ Z]$$

La formule de changement de repères donne les relations entre les coordonnées.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ et ainsi } \begin{cases} x = 0 + X \\ y = 1 + Y \\ z = -Y + Z \end{cases}$$

Dans le repère R', l'équation de l'intersection dans le repère du plan est donc $X^2+2Y+1= 0$, équation d'une parabole..

d) Un repère cartésien non orthonormé du plan d'équation y+ 2z =1 est par exemple (A,
$\vec{u}, \vec{v}$) avec A de coordonnées (0, -1, 1) dans le repère R, $\vec{u}$ de coordonnées (1, 0, 0) et $\vec{v}$ de coordonnées (0, 2, -1). Soit donc le nouveau repère R'= (A, $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{k}$) et si m est un point de l'espace, on représente le point m par les matrices unicolonnes :

$$M_R(m) = {}^t[1\ x\ y\ \ z] \text{ et que } M_{R'}(m) = {}^t[1\ X\ Y\ \ Z]$$

La formule de changement de repères donne les relations entre les coordonnées.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ et ainsi } \begin{cases} x = 0 + X \\ y = -1 + 2Y \\ z = -Y + Z \end{cases}$$

Dans le repère R', l'équation de l'intersection dans le repère du plan est donc $X^2+3Y^2-4Y+1 = 0 = X^2+3(Y-2/3)^2-4/3$, équation d'une ellipse.

Exercice 5

On utilise la méthode de Gauss pour obtenir un repère (non orthonormé) sur lequel la quadrique est sous forme réduite. On note R = (O,$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) le repère cartésien orthonormé sur lequel on a représenté les quadriques;

a) $x^2+ 6y^2-8zx-4xy+2x+4y-14z-3 = (x-2y-4z+1)^2+2y^2+8y-16yz-16z^2-6z-4 =$
$(x-2y-4z+1)^2+2(y-4z+2)^2 -48z^2+26z-12 = (x-2y-4z+1)^2+2(y-4z+2)^2 -48(z-13/48)^2 - 407/48 = 0$.

Ainsi la signature est (2, 1) et la quadrique est un hyperboloïde à une nappe.

On cherche un nouveau repère R' tel que, si m est un point de l'espace, on représente le point m par les matrices unicolonne $M_R(m) = {}^t[1\ x\ y\ \ z]$ et $M_{R'}(m) = {}^t[1\ X\ Y\ \ Z]$ ainsi , sur R', la quadrique s'écrit $X^2+2Y^2-48Z^2=407/48$.

On obtient la matrice de changement de repères $M_{R'}(R)$ à partir de la relation :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -13/48 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Noter que si l'on veut $M_R(R')$, on inverse la matrice ci-dessus.

b) $2x^2+ y^2+z^2-8zy-4xy+2y-2z+1= 2(x-y)^2-y^2-8yz+2y-2z+1=2(x-y)^2 - (y +4z-1)^2+17z^2-10z+2$

$= 2(x-y)^2 - (y+4z-1)^2+17(z-5/17)^2 +9/17 = 0$.
Ainsi la signature est (1, 2) et l'équation réduite est $-2X^2+Y^2-17Z^2 =9/17$, la quadrique est un hyperboloïde à deux nappes.

c)$x^2+ 3y^2+3z^2-2zy-2xz-2xy-a = (x-y-z)^2+2(y-z)^2-a = 0$, signature (2, 0) ou (0, 2) équation réduite $X^2+2Y^2 = a$.

* Si $a > 0$ on obtient un cylindre.
* Si $a = 0$ on obtient une droite, intersection de deux plans.
* Si $a<0$ on obtient l'ensemble vide.

Si on veut préciser, il faut trouver un repère orthonormé. On recherche une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice :

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont 0, 3, 4 et sur la base de vecteurs propres orthonormée ($\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$) l'équation réduite est $3Y^2+4Z^2 = a$.

* Si $a > 0$, on a un cylindre de base une ellipse et de direction la droite passant par O et de vecteur directeur le premier vecteur de la base.
* Si $a = 0$, on a la droite, direction du cylindre.
* Si $a<0$ l'ensemble vide.

d) $x^2+ 2azy-2bx= (x-b)^2+2ayz-b^2 = (x-b)^2+a/2(y+z)^2- a/2(y-z)^2-b^2 = 0$.

* Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$ la signature est (2, 1) on a un hyperboloïde à une nappe.
* Si $b \neq 0$ et $a = 0$ la signature est (1, 0) on a deux plans parallèles $x=0$, $x=2b$.
* Si $b = 0$ et $a \neq 0$ la signature est (2, 1) on a un cône passant par l'origine.
* Si $b = 0$ et $a= 0$ la signature est (1, 0) on a le plan $x=0$.

Exercice 6

Soit E un espace affine euclidien de dimension n, et $R = (a_0, a_1, ..., a_n)$ un repère affine de E et $R = (a_0 , \overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, ..., \overrightarrow{a_0a_n})$ le repère cartésien associé.
Si σ est une forme 2-affine, on note $M_R(\sigma)$ la matrice représentant σ dans le repère R et $M_R(\sigma)$ la matrice représentant σ dans le repère R.
On a les relations de changement de repères habituelles, soit :

$$M_R(\sigma)= {}^t M_R(R)\, M_R(\sigma)\, M_R(R)$$

$M_R(R)$ est la matrice qui a des 1 sur la première ligne et la diagonale et des 0 ailleurs.
On obtient $M_R(\sigma)$ à partir de $M_R(\sigma)$ en additionnant les lignes à la première ligne et les colonnes à la première colonne.
a) On se place dans le plan affine et considère le repère affine R = (A, B, C) et le repère cartésien $R = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Si m est un point du plan, ses coordonnées barycentriques(resp. cartésiennes) sont notées (x, y, z) (resp. (Y, Z)).
Si σ est une conique, son équation sur R est $aY^2+bZ^2+gYZ+dY+eZ+f = 0$. Si elle passe par les trois points du repère alors f=0, a+d=0 et b+e = 0, et l'équation devient :

$$a(Y^2-Y)+b(Z^2-Z)+gYZ = 0.$$

Comme l'on a les relations $y = Y$, $z = Z$ et $x+y+z=1$, on obtient $Y^2-Y = Y(Y-1)= -Y(x+z)=-yx-yz$ et de même, $Z^2-Z = Z(Z-1)= -Z(x+y)=-zx-yz$.
Ainsi l'équation est : $a(yx+yz)+b(zx+zy)-gyz = 0 = (a+b-g)yz+bxz+axy = 0$.

b) Dans l'espace affine le repère affine est R = (A, B, C, D) et le repère cartésien est R = (A, $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$). Si m est un point de l'espace, ses coordonnées barycentriques(resp. cartésiennes) sont notées (t, x, y, z) (resp. (X, Y, Z)).
Si σ est une conique, son équation sur R est :

$$aX^2+bY^2+cZ^2+dXY+eXZ+fYZ+gX+hY+iZ+j = 0 .$$

Si elle passe par les quatre points du repère alors $j=0$, $a+g=0$, $b+h = 0$ et $c+i=0$.
L'équation devient :

$$a(X^2-X)+b(Y^2-Y)+c(Z^2-Z)+ dXY+eXZ+fYZ = 0.$$

Comme l'on a les relations $x=X$, $y =Y$, $z =Z$ et $t+x+y+z=1$, on obtient $X^2-X = X(X-1)= -X(t+y+z)=-xt-xy-xz$, $Y^2-Y = Y(Y-1)= -Y(t+x+z)=-yt-yx-yz$ et de même, $Z^2-Z = Z(Z-1)= -Z(t+x+y)=-zt-zx-yz$.
Ainsi l'équation est : $a(xt+xy+xz)+ b(yt+yx+yz)+c(zt+zx+zy)-exz-fyz-dyx = 0 = axt+byt+czt +(a+b-d)xy+(a+c-e)xz+(b+c-g)yz$.