Chapitre I ANALYSE COMBINATOIRE

Exemple introductif

Le but de ce chapitre est d'apprendre à dénombrer des ensembles dans des conditions variées. La compréhension de ce chapitre et des exercices qui s' y rapportent constitue un préalable indispensable à l'étude du calcul classique des Probabilités.

On considère un ensemble E ayant 3 éléments, E = {a, b, c} choisir 2 éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs manières différentes suivant que l'on ordonne les éléments et que l'on autorise la possibilité de choisir plusieurs fois le même objet ou non.
On visualise tous les cas possibles dans le tableau ci-dessous :

	répétition	sans répétition
avec ordre	aa ab ac ba bb bc ca cb cc	ab ac ba bc ca cb
sans ordre	aa ab ac bb bc cc	ab ac bc

A) ARRANGEMENT AVEC REPETITION

DÉFINITION: Étant donné un ensemble fini de n objets, on appelle arrangement avec répétition de ces n objets p à p, tout groupement ordonné de p objets choisis parmi les n objets avec répétition. Le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à n^p.

Pour construire un tel arrangement , on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en première position, il y a n choix possibles.
Puis on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en deuxième position, il y a n choix possibles, ce nombre de choix se multiplient donc au nombre de choix précédents Puis on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en troisième position et ainsi de suite jusqu'au p- ième élément.

Ainsi il y a n^p choix possibles et le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à n^p.

Exemples

a) Si E et F sont des ensembles finis et si F(E,F) désigne l'ensemble des applications de E dans F, alors si Card(E) = p et Card(F) = n , Card(F(E,F)) = n^p.

b) Si E est un ensemble fini et si P(E) désigne l'ensemble des parties de E , alors si Card(E) = n, Card(P(E)) = 2^n . (à une partie de E on associe sa fonction indicatrice)

c) Le nombre de tirages différents de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n est égal à n^p lorsque les tirages sont non exhaustifs (c'est à dire avec remise après chaque tirage).

d) Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases , chaque case pouvant éventuellement contenir plusieurs objets est n^p.

B) ARRANGEMENT SANS REPETITION

DÉFINITION: Étant donné un ensemble fini de n objets, on appelle arrangement sans répétition de ces n objets p à p, tout groupement ordonné de p objets choisis parmi les n objets sans répétition. Le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à n(n-1)...(n-p+1) si n ≥ p et nul sinon et sera noté A_n^p.

On notera que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et que $n \geq p$

En général on dit arrangement sans précisions supplémentaires. Pour construire un tel arrangement , on choisit un élément de l'ensemble que l'on place en première position, il y a n choix possibles. Puis on choisit un élément de l'ensemble différent du premier que l'on place en deuxième position, il y a n - 1 choix possibles, ce nombre de choix se multiplient donc au nombre de choix précédents Puis on choisit un élément de l'ensemble différent des deux premiers que l'on place en troisième position et ainsi de suite jusqu'au p - ième élément.
Ainsi il y a n(n-1)...(n-p+1) choix possibles et le nombre d'arrangements de n objets p à p est égal à n(n-1)...(n-p+1).

Exemples

a) Si E et F sont des ensembles finis et si I(E,F) désigne l'ensemble des applications injectives de E dans F, alors si Card(E) = p et Card(F) = n , Card(I(E,F)) = n(n-1)...(n-p+1).

b) Si E est un ensemble fini et si B(E) désigne l'ensemble des bijections de E , alors si Card(E) = n, Card(B(E)) = n! (une bijection est une injection de E sur E).

c) Le nombre de tirages différents de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n est égal à n(n-1)...(n-p+1).lorsque les tirages sont exhaustifs (c'est à dire sans remise après chaque tirage).

d) Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases , chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est n(n-1)...(n-p+1).

C) PERMUTATION

DÉFINITION: Étant donné un ensemble fini de n objets, on appelle permutation de ces n objets tout groupement ordonné de n objets choisis parmi les n objets. Le nombre de permutation de n objets est égal à n!.

Une permutation est un arrangement sans répétition de ces n objets n à n, par conséquent on est dans le cadre du paragraphe précédent.
On peut noter que n! est le nombre de façons d'ordonner n objets.

D) COMBINAISON SANS REPETITION

DEFINITION: Étant donné un ensemble fini de n objets, on appelle combinaison sans répétition de ces n objets p à p, tout groupement non ordonné de p objets choisis parmi les n objets sans répétition. Le nombre de combinaisons de n objets p à p est égal à $\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$ et noté C_n^p.

On notera que si n ≥ p , $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et zéro sinon .

La notation anglo-saxonne est $\binom{n}{p}$.

En général on dit combinaison sans précisions supplémentaires.

A partir d'une combinaison sans répétition de n objets p à p , on obtient un arrangement de n objets p à p en ordonnant ces p objets. Comme il y a p! façons d'ordonner p objets, on peut dire qu' à une combinaison correspond p! arrangements et ainsi on obtient la relation.

Exemples

a) Si E est un ensemble fini et si $P_p(E)$ désigne l'ensemble des parties de E ayant p éléments, alors si Card(E) = n, Card($P_p(E)$) = C_n^p

b)Le nombre d'applications d'un ensemble ayant n éléments dans {0,1} qui envoient exactement p éléments dans 0 et les autres dans 1 est égal à C_n^p .

c) Le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n cases , chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est C_n^p.

d) La formule du binôme valable exclusivement dans le cas où la loi multiplicative est commutative ou du moins lorsque les éléments a et b commutent.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

e) Le nombre d'applications strictement croissantes de Δp ={1, 2, ..., p} dans Δn ={1, 2, ..., n} est égal à C_n^p.

Propriétés

**** Formule et triangle de Pascal**

On montre facilement par réduction au même dénominateur la formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ qui permet à l'aide du tableau ci-dessous d'obtenir les différentes valeurs des combinaisons.

Ce tableau s'appelle triangle de Pascal.

p n	0	1	2	3	..	
0	1	0	0	0		
1	1	1	0	0		
2	1	2	1	0		
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
	..					

**** Utilisation de la formule du binôme pour le calcul de différentes sommes.**

A partir de l'égalité polynomiale $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k 1^k X^{n-k}$ on peut, en remplaçant l'indéterminée X par une valeur 1 par exemple , obtenir la relation $2^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k$.

On peut obtenir d'autres relations polynomiales par dérivation ou par multiplication par un polynôme. Ainsi, en donnant une valeur à l'indéterminée on obtient des relations du type précédent.

On peut aussi en recherchant le coefficient correspondant au terme X^k du polynôme $(1+X)^{n+m}=(1+X)^n(1+X)^m$, obtenir la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$$

**** Généralisation .**

Le nombre d'applications d'un ensemble ayant n éléments dans {0,1, 2} qui envoient exactement n_1 éléments dans 0, n_2 éléments dans 1, $n_3 = n-n_1-n_2$ éléments dans 2 est égal à:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

Plus généralement, le nombre d'applications d'un ensemble ayant n éléments dans {0,1, 2,......, p-1} qui envoient exactement n_1 éléments dans 0, n_2 éléments dans 1, $n_3 = n-n_1-n_2$ éléments dans 2 ,......., n_p éléments dans p-1 est égal à :

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots\ldots C_{n_p}^{n_p} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_p!} \text{ avec } n_1+n_2+\ldots+n_p = n.$$

E) COMBINAISON AVEC REPETITION

DÉFINITION: Étant donné un ensemble fini de n objets, on appelle combinaison avec répétition de ces n objets p à p, tout groupement non ordonné de p objets choisis parmi les n objets avec répétition. Le nombre de combinaisons avec répétition de ces n objets p à p, est égal à :

$$C_{n+p-1}^p \text{ et est noté } K_n^p.$$

La démonstration de ce résultat consiste à construire une bijection de l'ensemble des d'applications croissantes de Δp dans Δn sur l'ensemble des d'applications strictement croissantes de Δ_p dans Δ_{n+p-1}.

Plus précisément, on associe à f application croissante de Δp dans Δn l'application g = g(f) définie par : si i est dans Δ_p g(i) = f(i) +i-1.
On montre alors que g est une bijection de l'ensemble des d'applications croissantes de Δ_p dans Δ_n sur l'ensemble des d'applications strictement croissantes de Δ_p dans Δ_{n+p-1}.
Le nombre de combinaisons avec répétition de N objets p à p est égal au nombre de combinaisons formées d'un seul objet, plus le nombre de combinaisons formées de deux objets et ainsi de suite jusqu'au nombre de combinaisons formées de p objets.
On obtient ainsi la relation :

$$K_n^p = C_n^1 + C_{p-1}^1 C_n^2 + \dots + C_{p-1}^{p-1} C_n^p = \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i C_n^{i+1} = \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{p-1-i} C_n^{i+1} = C_{n+p-1}^p$$

Exemples

a) Le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n cases , chaque case pouvant contenir éventuellement plusieurs objet est K_n^p.

b) Le nombre d'applications croissantes de Δp dans Δn est égal à K_n^p.

c)Le nombre d'applications f d'un ensemble E de n éléments dans l'ensemble { 0,1,...., p} telles que $\sum_{x \in E} f(x) = p$ est égal à $K_{p+1}^{n-1} = K_n^P$.

On pourra observer que ce cas revient à placer p objets indiscernables dans n cases, si a est un **élément de** E, f(a) correspond au nombre d'objets que l'on place dans la case a.

TABLEAU RECAPITULATIF

Arrangements de n objets p à p	$n \geq p^{(*)}$	A_n^p
Combinaisons de n objets p à p	$n \geq p^{(*)}$	C_n^p
Permutations de n objets		$n\,!$
Arrangements avec répétition d'ordre $(p_1,\ldots,p_n)$ de $\{1,\ldots,n\}$	$\sum p_i = p$	$\dfrac{p!}{p_1!p_2!\ldots p_n!}$
Combinaisons avec répétition d'ordre p de $\{1,\ldots,n\}$		K_n^p
Permutations avec répétition d'ordre $(n_1,\ldots,n_p)$ $\sum n_i = n$ (permutations de n éléments parmi lesquels n_i sont du type i et ce pour $i=1,\ldots,p$).		$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_n!}$
Rangements de p boules dans n cases distinctes		
Applications de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$		n^p
Applications injectives de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$	$n \geq p^{(*)}$	A_n^p
Applications croissantes de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$		K_n^p
Applications strictement croissantes de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$	$n \geq p^{(*)}$	C_n^p
Solutions de l'équation $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$	x_i dans **N**	$K_{n+1}^{p-1} = C_{n+p-1}^{p-1}$
	x_i dans N^*, $p \leq n$	C_{n-1}^{p-1}
Solutions de l'inéquation $\sum_{i=1}^{p} x_i \leq n$	x_i dans **N**	$K_{n+1}^{p} = C_{n+p}^{p}$
	x_i dans N^*, $p \leq n$	C_n^p

(*) Si cette condition n'est pas vérifiée il y a zéro possibilité.

EXERCICES DU CHAPITRE I

Exercice n°1

Écrire tous les arrangements avec répétition d'ordre 2 des 4 nombres 1, 2, 3 et 4.
Écrire tous les arrangements avec répétition d'ordre 3 des 3 nombres 4, 5 et 6.

Exercice n°2

On considère un jeu forain où 4 souris, numérotées de 1 à 4, se dirigent vers 5 cases A, B, C, D et E, plusieurs souris pouvant choisir la même case.
Sur chaque billet, le joueur inscrit une répartition des souris dans les cases et il gagne lorsque son pronostic se réalise.
Combien de billets le joueur doit-il acheter pour être sûr de gagner ?

Exercice n°3

On a un jeu de 32 cartes. On en prend 8, ce qui constitue "une main".
Dénombrer les mains qui contiennent :

- Exactement un as
- Exactement deux as
- Aucun as
- Au moins un as
- Deux cœurs et trois piques
- 2 cœurs, 3 piques et 1 trèfle
- 2 cœurs et 1 as
- 2 cœurs et 2 dames
- Un carré

Exercice n°4

On jette 3 dés A, B, C ayant chacun 6 faces. Les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles. Dénombrer :

-Tous les résultats possibles
-Les résultats où les 3 faces amenées sont identiques
-Les 3 faces sont différentes
-Les résultats ne comportant aucun as
-Les résultats comportant au moins un as
-Les résultats comportant exactement 1 as, 2 as

Exercice n°5

Un damier comporte 25 cases. Quel est le nombre de façon de placer 5 pions de telle façon qu'il y en ait 1 par lignes et 1 par colonnes.

Exercice n°6

Combien de nombres distincts peut-on former avec trois chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

1) En supposant que les trois chiffres sont distincts.
2) En supposant que chaque chiffres peut-être répété .
3) Reprendre le problème sachant que l'on utilise seulement les chiffres impairs.

Exercice n°7

Un réseau téléphonique départemental comporte des numéros de 6 chiffres. Quelle est la capacité théorique du réseau ? Quel est le nombre de numéros comprenant :

a) 6 chiffres différents.
b)1 chiffre apparaissant 2 fois, les autres une fois.
c)2 chiffres apparaissant 2 fois, les autres une fois.
d)3 chiffres apparaissant 2 fois.
e)2 chiffres apparaissant 3 fois.
f)1 chiffre apparaissant 4 fois, les autres une fois.
g)1 chiffre apparaissant 5 fois.

Exercice n°8

Dix lapins indiscernables sont répartis dans trois cages. De combien de façons cela peut-il se faire si :

-Aucune restriction n'est imposée
-Aucune cage ne doit être vide
-Aucune cage ne doit être vide et aucun lapin n'est isolé

Reprendre les questions précédentes si l'on suppose maintenant qu'il y a 2 mâles et 8 femelles.

Exercice n°9

Quel est le nombre de façon de disposer n hommes et n femmes autour d'une table ronde en respectant l'intercalation des sexes ?

Exercice n°10

De combien de manières peut-on constituer une somme de 100 Euros avec des pièces de 1, 2€, et de 5€ ?

Exercice n°11

Un rectangle est constitué par 6 cases carrées égales numérotées de 1 à 6 comme l'indique la figure ci-dessous :

6	5	4
1	2	3

On dispose de 6 plaquettes carrées, égales à chacune des cases et numérotées de 1 à 6.

a) On place les plaquettes sur les cases, à raison de une par case. Combien y a-t-il de positions possibles se distinguant :

-uniquement par la place des plaquettes ?
-à la fois par leur place et leur orientation

b) Chaque plaquette coïncidant avec la case de même numéro, on colorie en rouge le périmètre du rectangle qu'elles constituent, puis on les disperse.

De combien de façons peut-on former le rectangle de telle sorte que le contour rouge soit reconstitué ?

Exercice 12

De combien de manières peut-on remplir un tonneau de 10 litres avec un pot de 1litre et un pot de 2 litres ?

Exercice n°13

Calculer les sommes ci-dessous (on suppose que n dans N*).

$$\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)(k-1)C_n^k \quad ;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sin(kx)C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx)C_n^k$$

Exercice 14

E est un ensemble ayant n éléments, on note F = P(E) l'ensemble des parties de E, calculer :

$$S = \sum_{X \in F} \mathrm{card}(X)$$

Exercice 15

Montrer que :

$$C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$$

Exercice n°16

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectivement, met n et tels que A est inclus dans B.
Dénombrer l'ensemble des parties X telles que $A \subset X \subset B$

Exercice n°17

Quel est le nombre de couples de parties (X, Y) d'un ensemble ayant n éléments vérifiant la propriété : « $X \subset Y$ « ?

Quel est le nombre de couples de parties (X, Y) d'un ensemble ayant n éléments vérifiant la propriété : « $X \cap Y$ est un singleton « ?

<u>**Exercice n°18**</u>

Combien y a t il de couples d'entiers (i, j) dans D_n^2 tels que i < j ?

<u>**Exercice n°19**</u>

Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble des p- uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_1+x_2+\ldots+x_p \leq n$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_p$ éléments de N^*.

Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble des p- uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_1+x_2+\ldots+x_p = n$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_p$ éléments de N^*.

Reprendre les questions précédentes en supposant que les éléments sont dans N .

<u>**Exercice n°20**</u>

Montrer les relations suivantes :

$\sum_{k=1}^{k=n} k = n(n+1)/2$; $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (n(n+1))^2/4$.

Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)(k+4)$.

<u>**Exercice 21**</u>

Calculer la somme ci-dessous:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

<u>**Exercice 22**</u>

Dans les arènes de Rome, en 21 av J.C., 12 esclaves, 4 gaulois, 3 numides et 5 thraces , sont livrés en pâture à un lion.

Hypothèse 1: Le lion glouton, tue 3 esclaves d'un seul coup de patte et les dévore d'un seul coup.

Calculer :

a) Le nombre N de choix possibles de 3 victimes.

b) Le nombre n_1 de choix comprenant exactement un Gaulois.

c) Le nombre n_2 de choix comprenant au moins un Gaulois.

d) Le nombre n_3 de choix comprenant au maximum deux Thraces.

e) Le nombre n_4 de choix de 3 victimes ayant même nationalité .

f) Le nombre n_5 de choix de 3 victimes ayant des nationalités différentes .

Hypothèse 2: Le lion gourmand, tue 3 esclaves successivement avec lesquels il fera un menu composé d'une entrée, d'un plat de résistance et d'un dessert.
Calculer:

a) Le nombre N' de menus qu'il peut composer.

b) Le nombre n'_1 de menus dont l'entrée est un gaulois.

c) Le nombre n'_2 de menus dont le dessert n'est pas un numide

d) Le nombre n'_3 de menus dont l'entrée est un gaulois ou le dessert n'est pas un numide.

e) Le nombre n'_4 de menus dont les 3 plats ont de même nationalité .

f) le nombre n'_5 de menus comprenant au moins un thrace.

Hypothèse 3 Le lion, fin gourmet à l'estomac délicat, prélève 4 bouchées, éventuellement plusieurs qu'il déguste successivement.
Calculer :

a) Le nombre N" de dégustations possibles.

b)Le nombre n''_1 de dégustations dont la première bouchée est prélevée sur un thrace .

c) Le nombre n''_2 de dégustations dont au moins une bouchée est prélevée sur un Numide.

d) Le nombre n''_3 de dégustations dont la première bouchée est prélevée sur un Thrace et au moins une bouchée est prélevée sur un Numide .

e) Le nombre n''_3 de dégustations dont la première bouchée est prélevée sur un Thrace ou au moins une bouchée est prélevée sur un numide

Exercice 23

Pour tout couple d'entiers naturels (k , p) tels que $0 \leq k < p$, montrer que :

$$pC_{p-1}^{k} = (k+1)C_{p}^{k+1}.$$

Soient p dans N tel que $p \geq 4$ et $E = \{1,\dots, p\}$.

En dénombrant de deux manières les parties à 4 éléments de l'ensemble E, montrer la relation

$$\sum_{k=3}^{p-1}(p-k)C_{k-1}^{2} = C_{p}^{4}$$

[On pourra considérer les partitions de l'ensemble E de la forme $\{\{1,\dots, k-1\}, \{k\}, \{k+1,\dots,p\}\}$].

Exercice n°24

Combien y -a-t-il de lois de compositions internes définies sur $\mathbb{N}_n$?

Exercice n°25

Quel est le nombre de partitions injectives d'un ensemble E ayant 2, éléments, 3 éléments, 4 éléments (2 partitions sont considérées comme identiques si elles sont obtenues par changement d'indices).

Exercice n°26

Quel est le nombre de permutations totalement désordonnées de $\mathbb{N}_n$?

On entend par là, les permutations où aucun nombre n'est à sa place.
