Chapitre II LE CONCEPT DE PROBABILITE

Le but de ce chapitre est de donner un exposé simple de la théorie des probabilités.

A) EXPERIENCE ALEATOIRE ET EVENEMENTS

Une expérience est qualifiée d'aléatoire (on dit aussi épreuve) si on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut (ou aurait pu s'il s'agit d'une expérience par nature unique) donner lieu à des résultats différents.
On représente le résultat de cette expérience par un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles : Ω est appelé ensemble fondamental ou **univers des possibles** ou référentiel.
Ainsi à l'expérience qui consiste à lancer deux dés, on peut associer l'ensemble Ω= { (1,1) , (2, 2), (1, 3) ......, (6, 6)} qui a 36 éléments, il convient de noter ici que l'ensemble Ω n'est pas déduit de manière unique de l'expérience mais dépend de l'usage qui doit être fait des résultats ainsi dans l'exemple précédent, si on s'intéresse simplement à la somme des points obtenus, on peut choisir Ω={ 2,3,....,12}.

Un **événement** est une assertion ou proposition logique relative au résultat de l'expérience (exemple " un des dés porte un 1 sur la face supérieure") .On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie.

A la réalisation d'un événement on peut donc associer tous les résultats de l'épreuve correspondante ; ainsi "la somme supérieure ou égale à 10 " est l'ensemble des résultats suivants :
{ (4,6), (5,6), (6,6), (6,4),(6,5)} C'est-à-dire une partie de. Désormais nous **identifierons** un événement à la partie de Ω pour laquelle cet événement est réalisé.

On appelle **événement élémentaire** une partie de Ω réduite à un seul élément.

B) ALGEBRE D'EVENEMENTS

Réciproquement toute partie de Ω peut-elle être considéré comme un événement ou du moins est-il utile qu'il en soit ainsi ? Afin de répondre à cette question, nous allons supposer pour l'instant que l'ensemble des événements est une classe C de parties de Ω don nous allons définir les propriétés en nous référant à des besoins usuels.

À un événement A, on associe son contraire noté non(A) ou $\overline{A}$ tel que si A est réalisé alors non(A) ne l'est pas et réciproquement. Il sera donc naturel d'exiger la propriété suivante :

" Si A est dans C alors $\overline{A}$ est dans C ".

À est une suite d'événements, $\{A_i\}_{i \text{ dans } I}$ on associe l'événement noté $\bigcup_{i \in N} A_i$ qui est réalisé lorsque l'un au moins des événements A_i est réalisé et n'est pas réalisé sinon. Il est donc naturel d'exiger la propriété suivante :

"Si un au moins des A_i est dans C alors $\bigcup_{i \in N} A_i$ est dans C ".

On est donc conduit à définir une famille de parties représentant l'ensemble des événements associés à une épreuve, cette ensemble sera la Tribu d'événements.

Définition : On appelle espace probabilisable le couple (Ω , C) . Ω étant l'univers des possibles et C une famille de parties de Ω stable par passage au complémentaire et par union dénombrable. C est la tribu d'évènements associés à l'épreuve.

On montre qu'une tribu contient la partie pleine Ω (appelé événement certain). La partie vide (appelé événement impossible), et plus généralement une tribu est stable par opération ensembliste dénombrable (union, intersection, différence, différence symétrique ...).

Donnons encore quelques définitions utiles:

Événements incompatibles: Deux événements A et B sont dits incompatibles si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre.
Autrement dit les parties A et B sont disjointes.

Système complet d'événements. $A_1, A_2, ..., A_n$ forment un système complet d'événements si les parties constituent une partition de l'espace Ω .

Exemple fondamental, la tribu Borélienne

Une mesure physique est toujours représentée par un intervalle de **R** qui prend en compte l'incertitude de la mesure.
Si l'on veut construire un espace probabilisable représentant les mesures physiques, on est naturellement conduit à choisir **R** (ou un intervalle I de **R**) comme référentiel, la tribu d'événements étant la tribu engendrée par les intervalles de **R** (ou les intervalles contenus dans I).
Cette tribu est appelée la Tribu de Borel ou Borélienne et notée $B_{\mathbf{R}}$ (ou B_I). On montre que $B_{\mathbf{R}}$ est engendrée par les intervalles de type]- ∞, x[lorsque x est dans **R** (ou l'intersection de ces intervalles avec I).
Intuitivement, $B_{\mathbf{R}}$ est l'ensemble obtenu par opération ensembliste dénombrable à partir des intervalles de **R**, on montre que cette famille est différente et même beaucoup plus "petite" que l'ensemble des parties de **R** noté P(**R**).
On construit de la même façon la Tribu Borélienne de $\mathbf{R}^n$ engendrée par les pavés de type :

$$\prod_{i=1}^{i=n}]-\infty \quad x_i[$$

C) ESPACES PROBABILISES

À chaque événement, on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité, la théorie moderne des probabilités repose sur l'axiomatique suivante, dite de KOLMOGOROV.

Définition : Si (Ω, C) est un espace probabilisable, on appelle Probabilité une application de C dans $[0,1]$ notée P, vérifiant les conditions suivantes:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ est une suite d'éléments de C disjoints deux à deux, alors :

$$P\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \sum_{i \in N} P(A_i)$$

On appelle espace probabilisé le triplet (Ω, C, P).

Des axiomes on déduit immédiatement que :

- $P(\varnothing)=0$

- $P(\Omega/A)=1-P(A)$

- si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (formule des probabilités totales)

- $P\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \leq \sum_{i \in N} P(A_i)$

- Si $\{A_i\}_{i \text{ dans } N}$ est une suite décroissante d'intersection vide alors :

$$P\left(\bigcap_{i \in N} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} P(A_i)$$

- Une formule bien utile la formule de POINCARE: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une suite finie d'événements alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+1} \left(\sum_{I \in P_i(n)} P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)\right)$$

($P_i(n)$ désigne l'ensemble des parties à i éléments de $\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$)

DEUX EXEMPLES D'ESPACES PROBABILISES

**LA TRIBU DE BOREL ET LA MESURE DE LEBESGUE SUR [0,1]*

Dans l'intervalle [0 , 1] , on définit la tribu de Borel notée $B_{[0,1]}$ engendrée par l'ensemble des intervalles de [0 ,1] .
On montre que la mesure de la longueur des intervalles de [0,1] se prolonge sur les éléments de $B_{[0,1]}$. Cette mesure notée m, appelée mesure de Lebesgue vérifie les axiomes des probabilités ; ([0,1] , $B_{[0,1]}$, m) est un espace probabilisé.

**LA PROBABILITÉ DÉDUITE DE L'HYPOTHESE D'EQUIPROBABILITE DES ÉVÉNEMENTS ÉLÉMENTAIRES*

Lorsque la tribu d'événements associé à une épreuve est l'ensemble des parties de l'univers, il est clair que tous les événements s'expriment sous la forme d'union d'événements élémentaires. Si de plus l'Univers à un nombre fini d'éléments, les propriétés des probabilités permettent d'écrire la probabilité d'un événement sous la forme d'une somme de probabilité d'événements élémentaires.

Ainsi, la probabilité est parfaitement déterminée à partir des probabilités des événements élémentaires en particulier lorsque l'on fait l'hypothèse que les événements élémentaires sont équiprobables (c'est -à -dire ont même probabilité).
Plus précisément, si l'univers E est fini et si la tribu d'événements est P(E) la probabilité P déduite de l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires est définie par:

$$\boxed{\text{Si A est dans P(E)} \qquad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}}$$

(Habituellement exprimée sous la forme nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles)
Noter que cette probabilité dépend de l'Univers associé à l'épreuve. On convient de choisir l'Univers de manière à pouvoir faire l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires.
Par la suite, **lorsque l'on ne précisera pas la probabilité considérée, il s'agira toujours de celle-ci (on dit que l'on fait un choix au hasard).**

DÉFINITION EMPIRIQUE DES PROBABILITÉS

Expérimentalement, lorsqu'on répète une épreuve un certain nombre de fois n, un événement A associé à l'épreuve s'observe alors r_A fois.

On appelle fréquence de l'événement A le rapport $f_A = \frac{r_A}{n}$. C'est une probabilité.

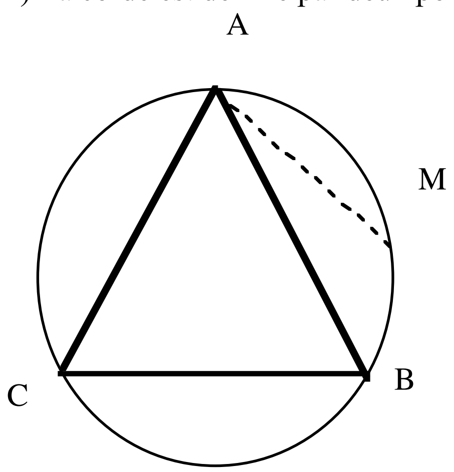
Si on fait une autre série de n épreuves, on obtient une autre fréquence. Lorsque n est assez grand, on constate que les diverses fréquences sont des mesures approchées d'une quantité constante que l'on peut prendre comme définition d'une probabilité.
On démontre que la probabilité ainsi définie satisfait aux axiomes car les fréquences, elles-mêmes constituent des probabilités.

Exemple : Afin de valider expérimentalement l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires, BUFFON a effectué 4040 parties de pile ou face et a obtenu 1952 piles (plus récemment PEARSON a effectué 24 000 parties de pile ou face et a obtenu 11988 piles).

Lorsque l'ensemble des résultats possibles de l'expérience n'est pas fini, la probabilité déduite de l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires n'est plus pertinente et doit être remplacée par des hypothèses liées à l'expérience. L'exemple ci-dessous montre les difficultés que l'on peut rencontrer.

Le paradoxe de Bertrand.

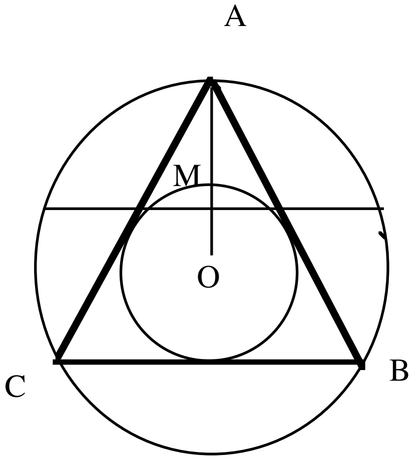
On considère un triangle équilatéral ABC et son cercle circonscrit. On note O le centre du cercle et R son rayon et l'on rappelle que la longueur du côté du triangle est alors R.
On choisit au hasard une corde du cercle. Quelle est la probabilité pour que la longueur de cette corde soit inférieure à la longueur du côté du triangle ?
Afin de répondre à cette question, il faut choisir la façon dont on définit la corde, cette façon déterminant la probabilité cherchée.
1) La corde est définie par deux points du cercle, on choisit au hasard deux points du cercle.



Comme on ne s'intéresse qu'à la longueur de la corde, on peut supposer que le point A est le premier point choisi et par conséquent la corde est déterminée à partir d'un unique point M du cercle choisi au hasard.
La longueur de la corde est inférieure à la longueur du côté si le point M est sur l'arc AB ou l'arc AC. Si l'on suppose que la probabilité est proportionnelle à la longueur de l'arc, on obtient :

$$\frac{\text{longueur des arcs}}{\text{longueur du cercle}} \text{ soit } \frac{2}{3}.$$

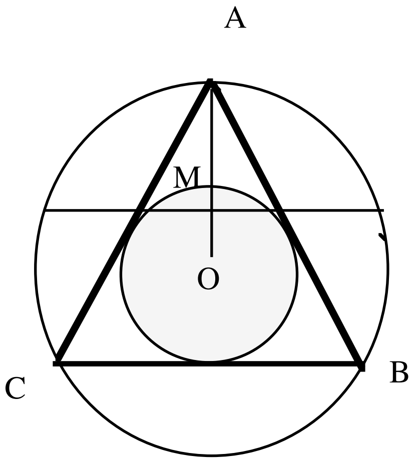
2) La corde est définie par son milieu M. On choisit au hasard un point M à l'intérieur du cercle.



La longueur de la corde est inférieure à la longueur du côté si le point M est à l'extérieur du cercle inscrit. Si l'on suppose que la probabilité est proportionnelle à la longueur des segments, on obtient :

$$\frac{\text{longueur du segment}}{R} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}.$$

3) La corde est définie par son centre et sa distance au centre O du cercle, on choisit au hasard un point M du segment [OA].



La longueur de la corde est inférieure à la longueur du côté si le point M est à l'extérieur du cercle inscrit. Si l'on suppose que la probabilité est proportionnelle à la surface, on obtient :

$$\frac{\text{aire du domaine}}{\text{aire du cercle}} \quad \text{soit} \quad \frac{\pi R^2 - \pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$$

La variété des réponses que l'on peut donner suivant le procédé choisi, constitue ce que l'on appelle le paradoxe de Bertrand. Le jeu usuel consiste à laisser tomber une aiguille sur le cercle et à ne tenir compte que des épreuves où elle coupe le cercle. Il correspond plutôt au deuxième cas, quoiqu'il soit difficile de réaliser correctement l'expérience.
Cet exemple montre que lorsque l'on considère des ensembles infinis, le raisonnement est insuffisant et l'expérimentation est le seul moyen de faire le bon choix.

D) LA NOTION DE PROBABILITE CONDITIONNELLE

Lorsque l'on sait qu'un événement est réalisé, cette nouvelle information devrait nous conduire à modifier l'univers puisque les conditions de l'épreuve ont changé.

En général, on préfère conserver l'univers et considérer une nouvelle probabilité prenant en compte cette modification.

Définition : Si (Ω , C, P) est un espace probabilisé et si B est un événement de probabilité non nulle, on associe à chaque événement A le nombre $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ appelé probabilité conditionnelle de A liée à B (ou plus simplement probabilité de A sachant B).

Ce nombre est noté P(A / B)

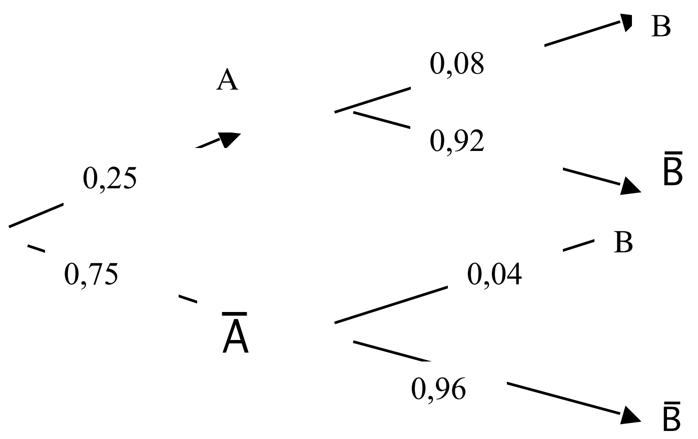
Une probabilité conditionnelle est une nouvelle probabilité définie sur le même espace probabilisé, on vérifie facilement qu'elle satisfait aux axiomes de Kolmogorov.
Compte tenu de la définition, on a la formule dite des probabilités composées:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :
On choisit au hasard une personne de la population décrite ci-dessous :

	Malades	Sains
Fumeurs	400	4600
Non-fumeurs	600	14400

A est l’événement «, ‘ la personne fume ».
B est l’événement la « personne est malade ».



P(B/A)= 0,08 , P(B/$\bar{A}$)= 0,04.

****Donnons quelques propriétés des probabilités conditionnelles:**

- Si A et B sont incompatibles, P (A / B) = 0

-P (A $\cap$ B) = P(B)P(A / B) et plus généralement,

-Si $A_1, A_2, ..., A_n$ est une suite finie d'événements alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) .... P\left(A_n / \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)$$

-$P(A / B) + P(\overline{A} / B) = 1$,

- $P(B) = P(A)P(B / A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A})$.

****Exemples**

1) On considère l'expérience consistant à jeter deux dés et soit T l'événement ", " la somme des nombres portés par la face supérieure des dés est égale à 5"
Quelle est la probabilité de l'événement A " le premier dé porte un nombre pair " lorsque l'on sait que T est réalisé ?
Première méthode: On choisit l'univers {(1, 4), (2, 3), (3, 2) , (4,1) }, l'événement A est représenté par {(2,3) , (4,1)} , la réponse est donc 1/2.
Deuxième méthode: On choisit l'univers {(i , j) / i et j sont dans 1, 2, .. ,6} et l'on calcule $P(A/T) = P(A \cap T) / P(T)$ avec $P(T) = 4/36$ et $P(A \cap T) = 2/36$, la réponse est aussi 1/2.

2) On tire successivement deux boules dans une urne contenant 10 boules rouges et 5 boules blanches. Les tirages sont supposés exhaustifs (c'est-à-dire sans remise après chaque tirage). Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges?

Si R1 désigne l'événement " la première boule tirée est rouge et R2 la deuxième boule tirée est rouge, alors P (R1 et R2) = P (R1) P (R2-R1).

P(R1)=10/15 (probabilité de tirer une rouge lorsqu'on tire une seule boule)
P(R2/R1)= 9/14 (probabilité de tirer une rouge lorsqu'on tire une seule boule dans une urne contenant 9 rouges et 5 blanches)

Ainsi P(R1 et R2) = 90/210

**** LE THEOREME DE BAYES**

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment un système complet d'événements de probabilité non nulle et si B est un événement de probabilité non nulle alors:

Pour i entier dans [1 n], $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{j=n} P(A_j)P(B/A_j)}$

Exemple : Votre voisin refuse de vous dire où il est parti en vacances mais vous savez qu'il ne pouvait aller qu'à Nice ou à Cherbourg.

Vous savez que sur 5 jours de vacances, il a eu 3 jours de beau temps.
Il fait beau en moyenne 9 jours sur 10 à Nice et 6 jours sur 10 à Cherbourg. Quelle est la probabilité qu'il soit allé à Nice ?

Si nous notons N l'événement « le voisin est allé à Nice », C l'événement « le voisin est allé à Cherbourg » et V l'événement « sur 5 jours de vacances il a eu 3 jours de beau temps.», alors on a :

$P[V / N]=C_5^3(0{,}9)^3(0{,}1)^2$; $P[V / C]=C_5^3(0{,}6)^3(0{,}4)^2$ et si on suppose que le voisin à choisi sa destination au hasard, on obtient :

$$P[N / V]=\frac{\frac{1}{2}C_5^3(0{,}9)^3(0{,}1)^2}{\frac{1}{2}C_5^3(0{,}9)^3(0{,}1)^2+\frac{1}{2}C_5^3(0{,}6)^3(0{,}4)^2}.$$

E) LA NOTION D'INDEPENDANCE

Si A et B sont deux événements, on veut exprimer la propriété que la probabilité que A se réalise est indépendante de la réalisation (ou non réalisation) de l'événement B, c'est- à -dire que $P(A/B)=P(A)=P(A/\overline{B})$ pour cela on choisit la définition:

Définition : Si (Ω, C, P) est un espace probabilisé, A et B deux événements de l'espace sont dits indépendants (en probabilité) si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Il ne faut pas confondre indépendants et incompatibles, deux événements incompatibles sont fortement dépendants puisque la réalisation de l'un empêche celle de l'autre !

Noter que si $P(A) = 0$ alors si B est un événement alors $P(A \cap B) = 0$ et par conséquent A est indépendant de B, noter aussi que si $P(A) \neq 0$ alors si A et B sont indépendants,

$$P(B/A) =P(A \cap B)/P(A)=P(A)P(B)/P(A)=P(B)$$

Cette propriété justifie la forme symétrique de la définition.

En fait la propriété d'indépendance est liée non pas aux événements mais aux tribus engendrées par ces événements. On rappelle que si A est un événement, la tribu engendrée par A est composée des événements $\{\Omega, \emptyset, A, \Omega \setminus A\}$.

Théorème: Si (Ω, C , P) est un espace probabilisé, A et B deux événements de l'espace sont dits indépendants (en probabilité) si et seulement si les événements de la tribu engendrée par A sont indépendants des événements de la tribu engendrée par B.

Montrons par exemple que si $P(A \cap B)=P(A)P(B)$ alors, $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

On sait que $P(A) = P(A \cap B)+P(A \cap \overline{B})$ par conséquent, si $P(A \cap B)=P(A)P(B)$ alors, $P(A) = P(A)P(B)+P(A \cap \overline{B})$) et on obtient $P(A)(1-P(B)) = P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.

Exemple précédent :
On choisit au hasard une personne de la population décrite ci-dessous :

	Malades	Sains
Fumeurs	400	4600
Non fumeurs	600	14400

A est l'événement « la personne fume ».
B est l'événement la « personne est malade ».

On vérifie que les événements A et B sont indépendants ce qui signifie que la proportion de personnes malades et de personnes saines est la même parmi les fumeurs et les non-fumeurs.
Par suite, les événements « la personne fume » et « la personne est saine » sont indépendants ;
« la personne ne fume pas » et « la personne est saine » sont indépendants ;
« la personne ne fume pas» et « la personne est malade » sont indépendants .

Compte tenu du fait que la notion d'indépendance est une notion qui dépend de la tribu engendrée par les événements, on généralise la notion d'indépendance à une famille finie d'événements de la façon suivante:

Définition : Si (Ω, C, P) est un espace probabilisé, si $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots, A_n$ est une famille d' événements , on dira que les événements sont indépendants dans leur ensembles (ou mutuellement indépendants) si et seulement si :
Pour tout i=1,…,n et tout événement B_i appartenant à la tribu engendrée par A_i,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} P(B_i)$$

On montre que cette définition est équivalente à la suivante :

Définition : Si (Ω, C, P) est un espace probabilisé, si $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots, A_n$ est une famille d' événements , on dira que les événements sont indépendants dans leurs ensembles (ou mutuellement indépendants) si et seulement si :

Si I est une partie de $\{1,2,\ldots, n\}$ $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

On notera que cette notion est plus forte que la précédente, une famille d'événements peut être formée d'événements indépendants deux à deux sans que ceux-ci soient indépendants dans leur ensemble.

Exemple :
Une urne contient 4 boules ; elles portent respectivement les nombres 1, 2, 3, 123. On tire une boule de l'urne.
On considère les événements :

-A représente l'événement : " on observe le chiffre 1 sur la boule tirée"

-B représente l'événement : " on observe le chiffre 2 sur la boule tirée"
-C représente l'événement : " on observe le chiffre 3 sur la boule tirée"

EXERCICES DU CHAPITRE II

Exercice n°1

Quel est l'univers que l'on peut associer aux épreuves suivantes :

a) Un observateur joue à pile ou face 5 fois de suite et ne retient que les éventualités pile ou face.

b) Un observateur mesure la durée de vie en heure d'une ampoule électrique.

c) On tire une boule d'une urne contenant 3 boules blanches b_1, b_2 ,b_3 ,et 2 boules noires n_1 et n_2

d) On tire 2 cartes d'un jeu de 32 cartes.

e) On lance 3 pièces de monnaie indiscernables.

f) On observe le nombre de coups de téléphone dans un standard téléphonique, chaque jours de la semaine.

g) On mesure le diamètre d'une pièce de monnaie (en mm).

h) On place deux objets a, b dans trois boites A, B, C (on envisagera plusieurs cas suivant que chaque boite peut contenir un ou plusieurs objets).

Exercice n°2

On dispose d'un jeu de 32 cartes ; on tire une carte et on considère les événements :

A : la carte tirée est le valet de cœur

B : la carte tirée est un cœur

C : la carte tirée est une figure de pique (valet, dame, roi) ou un cœur

Calculer P(A), P(B), P(C), P(A et B), P(C et B),P(A et C),P(A ou B), P(C ou B), P(A ou C) et P(A et B et C).

Exercice n°3

Soit S le référentiel formé de 4 éléments ; S= { a_1, a_2 ,a_3 ,a_4 } . Laquelle des fonctions suivantes définit une probabilité ?

a) $P(\{a_1\})=1/2$, $P(\{a_2\})=1/3$, $P(\{a_3\})=1/4$, $P(\{a_4\})=1/5$

b) $P(\{a_1\})=1/2$, $P(\{a_2\})=1/4$, $P(\{a_3\})=-1/4$, $P(\{a_4\})=1/2$

c) $P(\{a_1\})=1/2$, $P(\{a_2\})=1/4$, $P(\{a_3\})=1/3$, $P(\{a_4\})=1/8$

d) $P(\{a_1\})=1/2$, $P(\{a_2\})=1/4$, $P(\{a_3\})=1/4$, $P(\{a_4\})= 0$

Exercice n°4

On pipe un dé de telle sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette le dé soit proportionnelle au résultat.

(Par exemple, 6 a une probabilité deux fois plus grande que 3)

Soit A={nombre pair} , B={nombre impair}, C={ nombre premier}

a) Donner la probabilité de chaque résultat possible
b) Calculer P(A), P(B), P(C).
c) Calculer la probabilité pour que :
1) On obtient un nombre pair ou un nombre premier.
2) On obtient un nombre premier impair.

Exercice n°5

A) Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet. On constitue un mot de 5 lettres en tirant au hasard successivement et avec remise 5 lettres de ce sac.

I - Déterminer l'univers et la probabilité associés à cette expérience.

II - Déterminer les probabilités pour que l'on constitue ainsi
1) Le mot FUMER
2) Le mot TASSE
3) Un mot quelconque composé des lettres T.A.S.S.E.
4) Un mot commençant par A
5) Un mot contenant un seul E
6) Un mot commençant par A, ayant B pour seconde lettre et ne contenant qu'un seul B
7) Un mot contenant exactement 3 consonnes
8) Un mot contenant dans cet ordre 1 voyelle, la lettre A et 3 consonnes
9) Un mot contenant exactement 2 voyelles dont la lettre A.

B) On suppose maintenant que l'on a effectué 5 tirages successifs sans remise. Déterminer les probabilités des événements 4), 5), 6), 7), 8) et 9).

Exercice n°6

Une personne écrit à n correspondants, des lettres distinctes puis il écrit les adresses au hasard. Calculer la probabilité pour qu'au moins, une lettre parvienne à son destinataire (on utilisera la formule de Poincaré).

Exercice n°7

Toutes les secondes, un homme fait soit un pas à droite, soit un pas à gauche. (Il ne reste pas sur place)
Il se meut sur un axe. On se propose d'étudier le nombre de chemins qui, au bout de n secondes, le conduisent à m pas à droite de la position d'origine.

a) On porte sur un axe (O x) le nombre de pas, sur un axe (O y) le nombre de secondes. Quels sont sur un tel diagramme les points "atteignables" ?

b) Quels sont les points "atteignables" en n secondes ?

c) Combien y a-t-il de chemins formés de n pas ?

d) Montrer que le nombre de chemins qui aboutissent au point (m, n) est $C_n^{\frac{n+m}{2}}$. Quelle est la probabilité d'aboutir à ce point ?

Exercice n°8

On dispose de 2 boîtes. L'une contient 5 vis et l'autre 5 écrous. Une vis va avec un écrou et un seul.
On prend au hasard 3 vis et 3 écrous. Calculer la probabilité pour que, parmi les vis et les écrous choisis :

a) une seule vis va avec un écrou
b) deux vis vont avec deux écrous
c) aucune vis ne va avec un écrou

Exercice n°9

Un distributeur automatique de café est détraqué. Il lui arrive toutefois avec une probabilité de 5/12 de fonctionner normalement, c'est-à-dire :

- On obtient un café et la pièce ne revient pas
- On n'obtient pas de café et la pièce revient

Il arrive aussi :

- Qu'on n'obtienne rien (ni café, ni monnaie) avec une probabilité 1/2
- Qu'on obtienne un café et que la pièce revienne !

a) Quelle est la probabilité de ce dernier événement particulièrement avantageux pour le consommateur ?

b) Sachant que la monnaie revient une fois sur 5(avec ou sans café), un client vient d'obtenir un café, quelle est la probabilité qu'il l'ait eue gratuitement ?

Exercice n°10

On considère 2 sacs S_1 et S_2 contenant chacun 3 boules rouges et 7 boules noires.
On prend une boule dans S_1 , on la place dans S, puis on prend une boule dans S. Quelle est la probabilité de tirer alors, une boule rouge ?

Exercice n°11

On dispose de 3 jetons □, □, □. □ a deux faces blanches, □ une face blanche et une noire, □ a deux faces noires.
On tire un jeton au hasard et on ne voit qu'une de ses faces ; elle est blanche. Quelle est la probabilité pour que l'autre le soit ?

Exercice n°12

Deux boîtes B1 et B2 contiennent chacune 5 jetons identiques numérotés de 1 à 5.

1) On extrait simultanément 2 jetons de B1.

Pour toutes les valeurs de k possibles, quelle est la probabilité que le plus petit des numéros lus sur ces jetons soit égal à k ?

2) On ajoute au contenu de B2 celui des 2 jetons (obtenus au 1) qui porte le plus petit numéro puis on extrait un jeton de B2.
Quelle est la probabilité qu'il porte le numéro k ?

Exercice 13

Une urne contient deux boules rouges et quatre boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. Si cette boule est rouge, on tire à nouveau trois boules, et si cette boule est noire, on tire seulement deux boules. L'expérience aboutit donc ainsi à trois ou quatre boules extraites au total, en deux tirages, les tirages sont dans tous les cas non-exhaustifs (avec remise).

1) Quelle est la probabilité pour que l'expérience fournisse exactement trois boules noires (et aucune rouge)?

2) Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules noires du second tirage soit exactement de deux?

3) On note E(k) l'événement « le nombre de boules rouges extraites au cours de l'expérience est k ». Donner en fonction de k la probabilité de E(k).

Exercice 14
Deux machines M_1 et M_2 produisent les mêmes pièces à raison de respectivement m_1 et m_2 pièces par jour. A la fin de la journée il y a une proportion p_1 de pièces mauvaises dans la production de M_1 et une proportion p_2 de pièces mauvaises dans la production de M_2 .

1)On effectue un tirage à l'aveugle, soit dans la production de M_1 soit dans la production de M_2, la probabilité de tirer dans la production de M_1 et celle de tirer dans la production de M_2 étant égales. La pièce ainsi obtenue étant bonne, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par M_1 ?

2)On mélange maintenant les deux populations et on prélève au hasard un lot de n pièces (sans remise).

a) Quelle est la probabilité pour que, dans ce lot le nombre de pièces mauvaises fabriquées par M_2 soit égal à k ?
(On supposera que $n \leq \inf(p_i\, m_i, (1-p_i)\, m_i)$, $i = 1, 2$).

b) Dans les mêmes conditions et avec les mêmes hypothèses, quelle est la probabilité que dans ce lot, k pièces soient mauvaises et fabriquées par M_2 et $n - k$ bonnes et fabriquées par M_1 ?

c)Pour $n = 2$, on a obtenu deux pièces mauvaises. Quelle est la probabilité pour que l'une ait été fabriquée par M_1 et l'autre par M_2 ?

Exercice n°15

Supposons que la couleur des cheveux des pères de familles se répartit comme suit : 55% châtain, 20% noirs, 15% blonds et 10% roux.
Supposons en outre, qu'une étude statistique ait permis de démontrer que 25% des enfants de pères aux cheveux châtains les avaient blonds, que 65% de pères aux cheveux blonds les avaient aussi blonds, que 5% de pères aux cheveux noirs les avaient aussi blonds et que 10% de pères aux cheveux roux les avaient blonds.
1) Calculer la probabilité qu'un enfant tiré au hasard ait les cheveux blonds.
2) Quelle est la probabilité que son père ait aussi les cheveux blonds ?

<u>Exercice 16</u>

Madame Mélusine désire avoir quatre enfants et rêve d'avoir trois filles et un garçon. Lors de la naissance de son deuxième enfant qui est une deuxième fille, elle dit à son amie « Nos chances de réaliser mon rêve sont le double de ce quelles étaient au départ »
1)
a) Si l'on sait que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont égales et que les sexes des nouveau-nés successifs sont indépendants, que peut-on dire de cette affirmation ?
b) Madame Mélusine pourrait-elle faire la même déclaration si elle avait eu une fille et un garçon lors des deux premières naissances ?
2)Reprendre l'exercice dans l'hypothèse où la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,51 et celle d'une fille est 0,49 (en supposant toujours indépendants les sexes des nouveau-nés successifs).

<u>Exercice 17</u>

Un automobiliste doit franchir successivement deux feux indépendants pour aller à son travail. Chaque feu est vert 60% du temps, rouge (ou orange) 40% du temps. Déterminer la probabilité :
a) Qu'aucun des feux ne soit rouge.
b) Qu'au moins un feu soit rouge.
c) Qu'un seul feu soit rouge.
d) Que les deux feux soient de la même couleur.

<u>Exercice 18</u>

Jouer au Loto consiste à cocher une combinaison de 6 cases sur une ou plusieurs grilles de 49 cases, numérotées de 1 à 49, en espérant qu'elle coïncidera avec la combinaison de 6 numéros, dite gagnante, qui sera désignée par le hasard.
Dans ce problème, nous n'étudions pas ce qui concerne le numéro complémentaire.

1. a)Quelle est la probabilité d'avoir 6 bons numéros en cochant une grille ?, en cochant deux grilles ? Calculer numériquement ces probabilités.
   b)Plus généralement, quelle est pour k est dans {0,…,6}, la probabilité d'avoir exactement k bons numéros en cochant une grille ?

2. On peut également jouer des "grilles multiples" : il s'agit de cocher plus de 6 cases sur une seule grille de manière à avoir plus de chance de rencontrer les numéros de la combinaison gagnante. Les tarifs proposés par la société du Loto National sont les suivants :
   - Grille "simple" (6 numéros par grille, sur deux grilles) : 2 € (soit 1€ par grille).
   - Grille multiple à 7 numéros : 7€

- Grille multiple à 8 numéros : 28€
- Grille multiple à 9 numéros : 84€
- Grille multiple à 10 numéros : 210€

a) Combien de grilles à 6 numéros peut-on former avec 7 numéros donnés ? Généraliser pour k numéros donnés, k est dans $\{7,8,9,10\}$.

b) En déduire le nombre de grilles à 6 numéros contenus dans une grille multiple à k numéros, k est dans $\{7,8,9,10\}$.

c) Les tarifs appliqués par la Société du Loto National vous paraissent-ils normaux ?

d) Calculer la probabilité d'obtenir exactement k numéros gagnants, $k \in \{0,1,\ldots,6\}$, en jouant une grille multiple de n numéros, $n \in \{7,\ldots,10\}$ (Il n'est pas nécessaire de détailler les calculs, il suffit de donner la forme générale en fonction de n et k).

3. La Société du Loto National accorde à un joueur ayant choisi une grille multiple et obtenu k numéros gagnants un multiple entier de gain correspondant à l'obtention de k bons numéros avec une grille simple. Par exemple, considérons un joueur qui a choisi une grille multiple de 7 numéros et obtient 3 bons numéros : la Société lui accorde un gain 4 fois supérieur au gain attribué à un joueur qui a obtenu 3 bons numéros avec une grille simple.

a) On considère une grille multiple à 7 numéros qui a obtenu 3 numéros gagnants. Combien de grilles à 6 numéros contenant 3 numéros gagnant peut-on former avec cette grille multiple à 7 numéros ? La décision de la Société du Loto National est-elle normale ?.

b) Généraliser pour les grilles multiples à k numéros, k est dans $\{7,8,9,10\}$, contenant 3 numéros gagnants.

<u>Exercice 19</u>

Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus. Cette caractéristique peut revêtir deux formes, notées :

$$R^+ \quad \text{et} \quad R^-$$

Pour chacun des deux sexes, la probabilité qu'un Français soit R^+ est 0,85 ; la probabilité pour qu'il soit R^- est 0,15.

a) La formation d'un couple est indépendante du facteur Rhésus. Énumérer les cas possibles, et calculer leurs probabilités.

b) Chez les couples où l'homme est R^+ et la femme R^-, il se produit dans 8% des naissances , des accidents qui nécessitent un traitement spécifique du nouveau-né.
Déterminer la probabilité p pour qu'un nouveau-né, de parents français dont on ne connaisse pas le facteur Rhésus, doive subir ce traitement.

c) Dans une maternité, il y a en moyenne vingt naissances par semaine. Déterminer la probabilité pour qu'au cours d'une semaine prise au hasard k nouveau-nés aient à subir ce traitement spécifique. Calculer la probabilité pour que k soit nul, et la probabilité pour que k soit égal à 1.

d) Quelle est la probabilité pour qu'il se présente plus d'un cas à traiter durant la même semaine?

e) Le premier enfant né dans une semaine doit subir ce traitement : quelle est la probabilité pour qu'un second enfant, né dans la même semaine, ait également à subir ce traitement ?

Exercice 20

Dans un club sportif, 15 personnes, dont Éric Glandin et Paul Dubœuf, jouent au football. Pour former une équipe, on choisit au hasard 11 personnes et on attribue à chacun un numéro de dossard de 1 à 11, au hasard. Une équipe est donc une liste de 11 joueurs numérotés.

1) Combien d'équipes différentes peut-on former ?
2) Calculer la probabilité des événements suivants (lors de la formation de l'équipe)

A = "Eric porte le dossard 1"
B = "Paul est dans l'équipe"
C = "Eric et Paul sont dans l'équipe"
D = "Eric ou Paul est dans l'équipe"

3) Eric est un joueur très fatigable. S'il a été sélectionné une semaine, il ne peut plus l'être la semaine suivante. L'entraîneur forme l'équipe trois dimanches de suite. Quelle est la probabilité de l'événement "Éric a été sélectionné une fois"; de l'événement "Éric a été sélectionné deux fois "; de l'événement "Éric n'a pas été sélectionné ".

Exercice 21

2 représentants sont tirés au sort parmi 60 étudiants (chacun ayant la même probabilité d'être choisi).

1) Combien y a-t-il de choix de représentants possibles ?

2) S'ils devaient choisir un titulaire et un remplaçant, combien y aurait-il de possibilités ?

3) Parmi les 60 étudiants il y a n filles.
a)Quelle est la probabilité que les 2 représentants soient de sexes différents ? Pour quelle valeur de n est-elle maximum ?
b)Quelle est la probabilité que les 2 représentants soient 2 filles ?
c)Quelle est la probabilité que l'un des 2 représentants soit une fille sachant qu'un garçon (au moins) a été choisi ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle maximum ?

Exercice 22

On place dans une urne 6 boules portant les lettres du mot PIERRE. On tire une à une 4 boules de cette urne, puis on note les lettres obtenues que l'on assemble (en modifiant éventuellement l'ordre d'arrivée) pour reconstituer un mot. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot PIRE, lorsque :

a) les tirages se font *sans remise*,

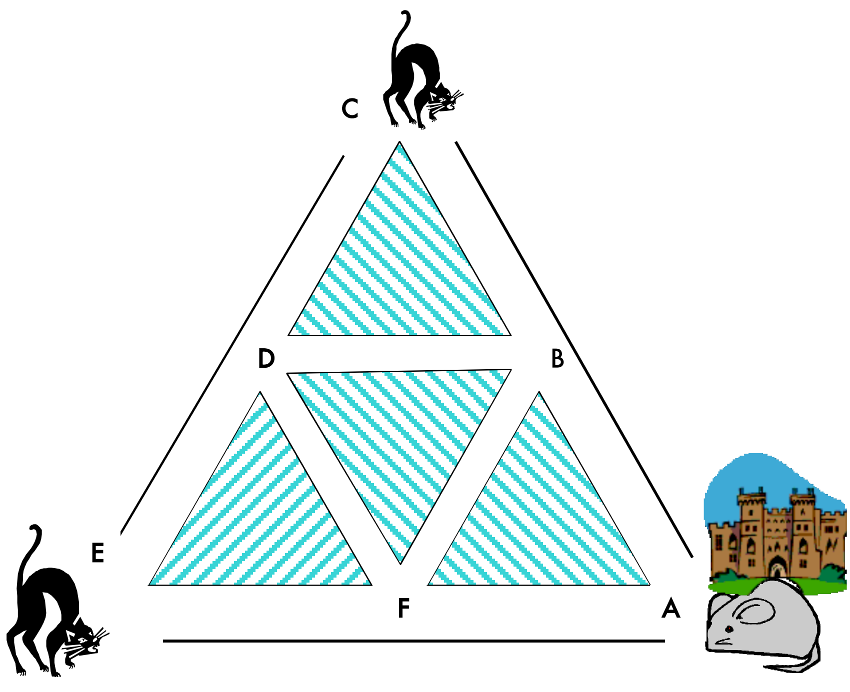
b) les tirages se font *avec remise*.

Exercice 23

Pour ouvrir un coffre fort, on dispose de 4 boutons pouvant prendre chacun les 10 positions 0,1,2 .....,9.
Le coffre ne s'ouvre que pour une position déterminée de chacun des 4 boutons : c'est ce que l'on appelle la combinaison du coffre.
Si l'expérience consiste à essayer une combinaison du coffre, choisir un référentiel de façon à définir la probabilité obtenue à partir de l' hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires.
a) Quelle est la probabilité pour qu'un voleur ne connaissant pas la combinaison du coffre, arrive à ouvrir celui-ci du premier coup.
b) Le coffre a un système d'alarme fonctionnant de la manière suivante : Si au moins un des boutons se trouve sur le 8 , une sonnerie se déclenche quand on essaie de tourner la poignée du coffre. Quelle est la probabilité pour que le voleur déclenche le
signal ?
c) Par une indiscrétion le voleur sait que la combinaison commence par un multiple de 3 non nul. Quelle est la probabilité pour que le voleur arrive à ouvrir le coffre du premier coup ?
d) Il sait de plus que les chiffres de la combinaison sont 1, 4, 3, 6 mais il ignore l'ordre. Quelle est la probabilité pour que le voleur arrive à ouvrir le coffre du premier coup ?

Exercice 24

Une souris pénètre en sortant de sa maison dans le labyrinthe dessiné ci – dessous :
Si elle passe en E ou en C, elle est mangée par le chat, si elle revient en A, elle rentre chez elle et n'en sort plus. Tant qu'elle n'a pas atteint l'un de ces points, elle continue à trotter sans jamais faire demi-tour ; à chaque croisement, elle prend au hasard une des routes qui se présentent.



Toutes les routes s'ouvrant au croisement où est la souris ayant alors la même probabilité d'être choisie, sauf celle par où la souris vient d'arriver puisqu'elle ne fait pas demi-tour. Ainsi, à l'étape 0 la souris se trouve en A, à l'étape 1 la souris se trouve en B ou F, à l'étape 2 la souris se trouve en C, D, E , F ou B et ainsi de suite...

Si i est un entier, on notera A_i (resp. B_i , C_i ,D_i , ...) l'événement la souris se trouve en A (resp. B , C ,D , ...) à la i- ème étape .

1) Calculer les probabilités des événements B_1 , F_1 , B_2 , C_2 ,D_2 , E_2 et F_2 ainsi que les événements correspondant à la troisième étape.

2) Montrer que si n est dans N* alors $P(B_n) = P(F_n)$.

3) Montrer que si n est dans N* et si n > 4 alors $P(B_n) = (\frac{1}{3})^3 (P(B_{n-3})$ et en déduire $P(B_n)$

4)Montrer que si n est dans N* et si n > 2 alors $P(A_n) = \frac{2}{3}P(B_{n-1})$ et en déduire $P(A_n)$

5) Calculer la probabilité que la souris retourne chez elle.

6)Calculer la probabilité que la souris tourne éternellement dans le labyrinthe.

7)Calculer la probabilité p que la souris soit mangée.

8) On propose une autre démonstration du calcul de p : pour cela, on considère la probabilité q que la souris soit mangée à l'avenir sachant qu' elle vient d' atteindre le point D.
Montrer que $q = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}q))$et en déduire que p=32/39.
