Chapitre III LES VARIABLES ALEATOIRES

On appelle épreuve aléatoire une épreuve dont le résultat dépend du hasard. Le résultat d'une telle épreuve dépend de facteurs trop nombreux et complexes pour qu'on puisse les maîtriser. Lorsque le résultat d'une telle épreuve peut être représenté par un nombre, on peut définir une variable aléatoire.

Par exemple , le résultat d'un jet d'une pièce peut être codé : 0 pour pile , 1pour face.

De façon conventionnelle, on notera toujours par une majuscule la variable aléatoire (en abrégé VAR) et par des minuscules les valeurs qu'elle peut prendre.

Noter que lorsque la tribu d'évènements est l'ensemble des parties de E, toutes les applications de E dans **R** sont des VAR.

DEFINITION Soit (E, T) un espace probabilisable. Une variable aléatoire réelle est une application X de E vers **R** telle que:

Pour tout x dans **R ,** { y dans E / X(y) < x } est dans T

Il est d'usage en probabilité de désigner par { X = x }, { X < x}, { X ≥ x }, ... les ensembles
{ y dans E / X(y) = x} , { y dans E / X(y) < x}, { y dans E / X(y) ≥ x} ...

Exemple
Soit A un événement de l'espace probabilisable (E, T) . L'application notée $\square_A$ qui à y dans E associe 1 si y est dans A et 0 sinon est une variable aléatoire nommée indicatrice de l'événement A.

THEOREME: L'ensemble des variables aléatoires définies sur un espace probabilisable (E, T) est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de E vers **R**. Lorsque E est fini , l'ensemble des indicatrices des évènements élémentaires constitue une base de cet espace vectoriel.

Lorsque X est une variable aléatoire et f une fonction , la composée foX est aussi une application de E dans **R** mais n’est pas toujours une VAR. On démontre que c’est le cas lorsque f est continue en tous points sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points.

Une variable aléatoire se présente comme un moyen permettant de transporter des informations définies sur un espace abstrait , l'espace probabilisé , sur l' espace des réels muni de la tribu Borélienne. plus précisément on a le théorème suivant :

THEOREME : SI (E, T, P) est un espace probabilisé et si X est une VAR définie sur E, alors l'application P_X définie par :

$$\text{Si} \quad A \text{ est dans } B_R \quad P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

est une probabilité. Cette probabilité est appelée probabilité image de X

Il est facile de montrer que P_X est une probabilité. On montre que cette probabilité est parfaitement déterminée à partir d'une famille qui engendre la tribu Borélienne par exemple les intervalles de **R** ou bien même les intervalles de type $]-\infty, x[$
On est donc amené à étudier les différentes valeurs $P_X(]-\infty, x[)$

A) FONCTION DE REPARTITION D'UNE VAR

DEFINITION : Si X est une VAR, on appelle fonction de répartition de X la fonction F définie par :

$$\text{Pour tous } x \text{ dans } \mathbf{R},\ F(x)= P_X(]-\infty, x[) = P(X < x)$$

Noter que si on connaît F , on connaît la probabilité image de n'importe quel intervalle de **R** . En particulier, si a, b sont dans **R**, et si $a \leq b$ alors $P_X([a , b[) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Une fonction de répartition a toujours les propriétés suivantes :

THEOREME : Si F est la fonction de répartition d'une VAR alors :

a) F est à valeurs dans [0,1]
b) F est non-décroissante
c) F est continue à gauche
d) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

En effet :

a) Si x est un réel, F(x) est une probabilité donc appartient à [0,1]

b) si a, b sont dans **R** et si $a \leq b$ alors $P_X([a, b[) = F(b) - F(a)$ est une probabilité donc $F(b) \geq F(a)$ et F est non décroissante.

c) Si u est un réel, il faut étudier la limite à gauche de F en u . Comme F est monotone (Cf. b) cette limite est égale à la limite de la suite $F(u-\frac{1}{n})$ lorsque n tends vers l'infini.

Pour cela on considère la partition de l'intervalle $[u-1,u[\, = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\, u-\frac{1}{k}, u-\frac{1}{k+1} [$ on obtient alors $F(u) - F(u-1) = \sum_{k=1}^{\infty} F(u-\frac{1}{k+1}) - F(u-\frac{1}{k}) = -F(u-1) + \lim\limits_{n \to +\infty} F(u-\frac{1}{n})$ et par conséquent

$$F(u) = \lim_{n \to +\infty} F(u-\frac{1}{n})$$

d) de même $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X < n) = 1$ (suite croissante d'intervalles)
et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1 - \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

Que peut-on dire de la continuité à droite ?

On montre de façon analogue au point b que $F(u) = P(X = u) + \lim\limits_{n \to +\infty} F(u+\frac{1}{n})$ et par conséquent on a les résultats suivants :
Si u est tel que $P(X = u) = 0$ alors F est continue en u.
Si u est tel que $P(X = u) \neq 0$ alors F admet en u une limite à gauche différente de la limite à droite, cette différence est égale à $P(X = u)$.

On montre que l'ensemble des points de discontinuité de la fonction est au plus dénombrable.

Exemple :

L'expérience consiste à jeter une pièce de monnaie . On considère la VAR X correspondant au nombre de piles obtenues. La fonction de répartition F de X est égale à :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

B) LOI DE PROBABILITE D'UNE VAR CAS DISCRET, CAS CONTINU

On a vu dans le paragraphe précédent qu'une fonction de répartition était continue sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable de points. Cette propriété nous amène à distinguer deux catégories de VAR :

-Les variables aléatoires dont l'image peut être mise en bijection croissante avec un ensemble fini ou avec **N** que l'on appellera VAR discrètes,

- Les variables aléatoires dont l'image est **R** ou un intervalle de **R** que l'on appellera VAR continues.

1) Étude des variables aléatoires discrètes

Si X est une VAR discrète, ImX peut être représentée par une suite croissante de réels x, x_2 ,...., x_n ,.... finie ou infinie dénombrable.

Par construction, les intervalles $[x_i, x_{i+1}[$ ne contiennent qu'un point de ImX et par conséquent la fonction de répartition d'X est constante sur cet intervalle.

Ainsi, la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est constante par morceaux ; les morceaux sont les intervalles de types $[x_i, x_{i+1}[$. La fonction de répartition est donc déterminée à partir de ses valeurs sur l'image de X. Comme $F(x_{i+1})- F(x_i) = P_X(x_i)$ on pourra reconstituer F à partir des différentes valeurs $P_X(x_i)$ lorsque x_i parcourt l'image de X. D'où la définition :

DEFINITION : Si X est une variable discrète on appelle loi de probabilité de X la donnée de ImX et des différentes valeurs $P_X(x_i)$ lorsque x_i parcourt l'image de X

Exemple: On jette deux dés. On définit la variable aléatoire X comme la somme des points obtenus.

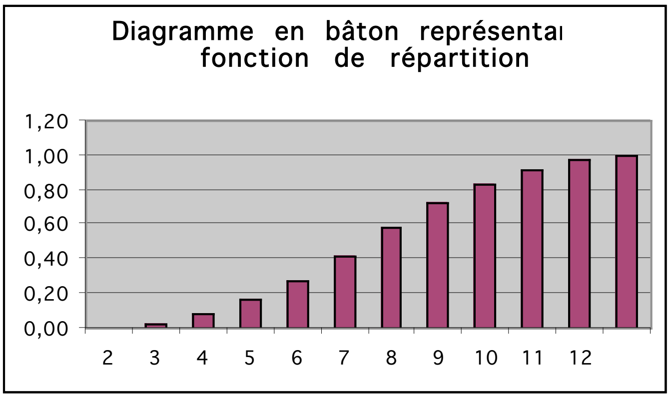
ImX={ 2,3,...,12} est un ensemble fini , la loi de probabilité de X est représentée par le tableau ci-dessous :

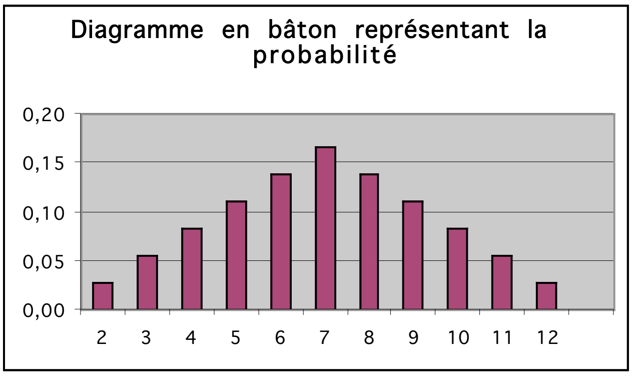
ImX	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(x_i)	**1/36**	**2/36**	**3/36**	**4/36**	**5/36**	**6/36**	**5/36**	**4/36**	**3/36**	**2/36**	**1/36**
F(x_i)	**0**	**1/36**	**3/36**	**6/36**	**10/36**	**15/36**	**21/36**	**26/36**	**30/36**	**33/36**	**35/36**

On peut remarquer que la valeur de la fonction de répartition s'obtient en additionnant les termes de la colonne précédente et que la valeur de celle-ci au point 12 est 1.

A partir de ce tableau on peut construire une représentation graphique de la loi de probabilité appelé " diagramme en bâton de la loi de probabilité".

Le graphe de la fonction de répartition est lui aussi représenté par un diagramme en bâton.





2) Etude des variables aléatoires continues

On dira qu'une variable aléatoire est continue lorsque sa fonction de répartition s'exprime sous la forme d'une intégrale. Plus précisément :

DEFINITION : Une variable aléatoire X est continue si il existe une fonction f positive, Riemann intégrable sur **R** telle que , si on note F la fonction de répartition de X, l'on ait :

Pour tous x dans **R** , $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Dans ces conditions, on dit que f est la densité de probabilité de X.
La loi de probabilité d'une VAR continue est la donnée de la densité de probabilité de celle-ci.

-On notera que comme F(x) tends vers 1 lorsque x tends vers $+\infty$, on a nécessairement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- On notera aussi que plusieurs densités peuvent donner la même fonction de répartition.

- F ainsi définie est continue mais en général n'est pas dérivable. Lorsque F est dérivable (sauf éventuellement sur un nombre fini de points) on montre que la dérivée de F est égale à f. Ainsi, dans ce cas on définit la densité de probabilité en donnant la valeur 0 aux points ou F n'est pas dérivable.

- Si a et b sont des réels tels que a <b alors on a la relation :

$$P[\, a \leq X < b \,] = \int_{a}^{b} f(u)du$$

- Une densité est une fonction positive intégrable sur **R** et d'intégrale égale à 1.

C) GRANDEURS CARACTERISTIQUES

On sait que l'ensemble des fonctions F(**R**, **R**) a une structure d'espace vectoriel sur **R**. On va construire un opérateur linéaire sur cet espace appelé espérance mathématique.

DEFINITION : Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé, et si g est une fonction, on appelle espérance mathématique de g par rapport à X le nombre noté **E**[g(X)] défini s'il existe par :

- Si X est discrète, **E**[g(X)] = $\sum_{x \text{ dans } ImX} g(x)P[X=x]$

-Si X est continue, de densité f, **E**[g(X)] = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$

A l'exception du cas discret fini, on notera que l'existence de l'espérance mathématique est liée à la convergence de la somme d'une série ou la convergence d'une intégrale.

Compte tenu des propriétés du signe somme et du signe intégral, il est clair que l'espérance mathématique est un opérateur linéaire. Les difficultés résident dans le fait que l'espace vectoriel sur lequel il opère est en général plus petit que l'ensemble des fonctions F(**R**, **R**) .

Exemple

- si g est la fonction constante : pour tous t dans **R** , g(t) = 1 alors **E**[g(X)]= **E**[1]**=1**

- si g est la fonction définie par : pour tous t dans **R** , g(t) = t , alors **E**[g(X)] est notée **E**[X] et appelée la **moyenne de X ou espérance de X.**

-Si a, b sont dans **R** et si g est la fonction définie par : pour tous t dans **R** g(t) =at +b alors **E**[g(X)] est notée **E**[aX+b] et est égale à : a **E**[X] + b puisque l'opérateur **E** est linéaire.

On appelle grandeur caractéristique de la variable aléatoire X des nombres obtenus a partir de l'espérance mathématique et d'une fonction particulière. Ces grandeurs permettent de résumer les propriétés des différentes lois de probabilité de la variable .

DEFINITION : Si X est une VAR , **E**[X] et appelée la **moyenne de X,** si n est un entier naturel, on appelle moment d'ordre n le nombre **E**[X^n] ,
La **variance de X** est le nombre **E**[(X-**E**[X] $)^2$] noté **V**[X].
La racine carrée de la variance est appelée **écart -type** et noté σ_X

On a les résultats suivants :

-Si X est une VAR et si a est un réel alors **E**[(X -a$)^2$] = **V**[X] +(**E**[X] -a$)^2$

-La formule de Kœnig- Huygens, $\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$

- Si X est une VAR et si a est un réel positif la moyenne et l'écart -type sont liées par la relation :

$$P[\, |X - \mathbf{E}[X]| \geq a\,\sigma_X \,] \leq 1/a^2$$

c'est l'inégalité de Bienaymé -Tchebychev.
Concrètement, cela signifie que la probabilité pour que la variable aléatoire X s'éloigne de la valeur centrale $\mathbf{E}[X]$ de plusieurs fois σ est très faible. Cette inégalité dont l' intérêt théorique vient de ce qu'elle est valable quelle que soit la loi de probabilité de X, n'a que peu d'applications pratiques , car la majoration qu'elle fournit est la plupart du temps excessive.

- L'inégalité de Markov est une conséquence directe de l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev . Si t est un réel positif la moyenne et l'écart -type de la VAR X sont liées par la relation :

$$P[\, |X - \mathbf{E}[X]| \geq t \,] \leq (\sigma_X / t)^2$$

On peut noter que lorsque l'écart- type est nul (ou proche de 0), X n'est plus aléatoire, la probabilité pour que X= $\mathbf{E}(X)$ est égale à 1(ou proche de 1).

D) CHANGEMENT DE VARIABLE ALEATOIRE

Si X est une variable aléatoire et si φ est une fonction continue par morceaux, alors $Y = \varphi \circ X$ est aussi une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X.

La relation qui lie les lois de probabilité de X et Y est la suivante :

$$\boxed{\text{Pour tous } y \text{ dans } \mathbf{R},\ P[Y < y] = P[\,X^{-1}(\varphi^{-1}(]-\infty, y[))]}$$

Compte tenu des propriétés des changement de variables sous le signe somme et des intégrales, on montre que l'on a toujours :

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\varphi(X)] \ \text{ et } \mathbf{V}[Y] = \mathbf{E}[\varphi(X)^2] - \mathbf{E}[\varphi(X)]^2}$$

Ainsi on peut calculer les grandeurs caractéristiques de Y sans connaître la loi de probabilité de X.

Compte tenu du fait que l'opérateur $\mathbf{E}$ est linéaire, on a la propriété suivante : Si X est une VAR de moyenne m et d'écart -type σ, la variable $Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$ est de moyenne nulle et d'écart –type 1. Lorsque l'on fait ce changement de variable, on dit que l'on a centré et réduit la variable.

Lorsque X est discrète $Y = \varphi \circ X$ est aussi discrète, $ImY = Im(\varphi \circ X)$ et si y est dans ImY.

$$P[Y=y] = P[X \in \varphi^{-1}(\{y\})] = \sum_{x \in ImX \cap \varphi^{-1}(\{y\})} P[X=x]$$

Exemple 1: Si $Y = 10X - X^2$

IMX	1	2	5	8	10
P[X =x]	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

IMY	0	9	16	25
P[Y =y]	0,1	0,2	0,4	0,3

Lorsque X est absolument continue de densité f, alors la fonction de répartition de $Y = \varphi \circ X$ est définie par la relation $P[X^{-1}(\varphi^{-1}(]-\infty , y[))]$

Exemple 2 : Si Y = | X | et si f(x) = 1/3 si x est dans]-1,2[et 0 ailleurs,

$$P[Y<y] = G(y) = P[|X|<y] = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ P[-y < X < y] \text{ sinon} \end{cases}$$

Si F est la fonction de répartition de X, on obtient $G(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ F(y) - F(-y) \text{ sinon} \end{cases}$

ainsi la densité deY est $g(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} \text{ si } y \text{ est dans }]0,1[\\ \frac{1}{3} \text{ si } y \text{ est dans } [1,2[\\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

Exemple 3 : Si $Y = X^2$ avec F fonction de répartition de X,

$$G(y) = P[Y < y] = P[X^2 < y] = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ P[-\sqrt{y} < X < +\sqrt{y}] \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$$

Si X est absolument continue de densité f, alors Y est aussi absolument continue de densité g avec, $g(y)=\begin{cases} 0 \text{ si } y<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})) \text{ si } y\geq 0 \end{cases}$.

E) PRINCIPALES LOIS DE PROBABILITES

La plupart des phénomènes statistiques peuvent être décrits par un petit nombre de modèles probabilistes ou lois de probabilité. Il convient donc de connaître les modèles probabilistes les plus courants de façon à pouvoir rechercher dans ce catalogue celui qui est susceptible de convenir à la description d'un phénomène aléatoire déterminé. Dans tous les cas le processus d'étude est le suivant :

- l'observation du phénomène fournit une distribution expérimentale
- l'analyse de cette distribution permet de choisir parmi les différents types de loi de distribution théorique celui qui parait convenir.
- la substitution de loi théorique à la distribution expérimentale n'est évidemment valable que si les valeurs observées et les valeurs théoriques sont assez proches l'une de l'autre. Pour cela il faut **tester** que la description du phénomène par la loi théorique est acceptable.

On distingue naturellement deux types de modèles, les modèles discrets et les modèles continus. Les modèles continus étant des approximations de modèles discrets.

I- LES MODELES DISCRETS

A) LA LOI UNIFORME

DEFINITION : Une variable aléatoire discrète X suit une loi uniforme lorsque

$ImX=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, et si x_i est dans ImX $P(X=x_i)=1/n$

Si X suit une loi uniforme , $\mathbf{E}[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\mathbf{V}[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2$

Lorsque ImX = {1,....., n }, **E**[X] = (n+1)/2 et **V**[X] = $(n^2-1)/12$.

B) LA LOI DE BERNOULLI et LA LOI BINOMIALE

La loi binomiale intervient chaque fois que l'on considère une suite d'expériences identiques indépendantes. Chaque expérience ayant deux résultats possibles l'un étant appelé succès et l'autre échec. Son importance provient, en particulier, de ce qu'elle s'applique au tirage d'un échantillon aléatoire et à l'interprétation des résultats obtenus par cette méthode.

DEFINITION : Une variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale de paramètres n dans $\mathbf{N}^*$ et p dans [0,1] lorsque ImX = { 0,1,....., n } et si k est dans ImX on a :
$$P(X =k) = C_n^k \, p^k(1-p)^{\,n-k}$$
La loi de **Bernoulli** correspond au cas n = 1

On dit alors que X suit une B(n , p) et on représente habituellement ceci sous la forme ci-dessous :

$$X \;\sqrt{\square}\; B(n , p)$$

Il faut remarquer que $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \, p^k(1-p)^{\,n-k} = (p + 1-p\,)^n = 1$, c'est la formule du binôme , ceci explique le choix du nom loi binomiale.
Noter que l'on répète n fois une expérience de façon indépendante et si cette expérience est une alternative, soit un succès avec une probabilité p soit un échec avec une probabilité 1-p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au nombre de succès au cours de ces n expériences est une B(n, p).

L'exemple standard est donné par l'expérience consistant tirer n boules dans une urne a deux catégories, les tirages étant non exhaustifs (c'est à dire avec remise après chaque tirage).

Propriétés

- On montre que si X $\sqrt{\square}$ B(n, p) alors **E**[X] = np et **V**[X] = np(1-p).

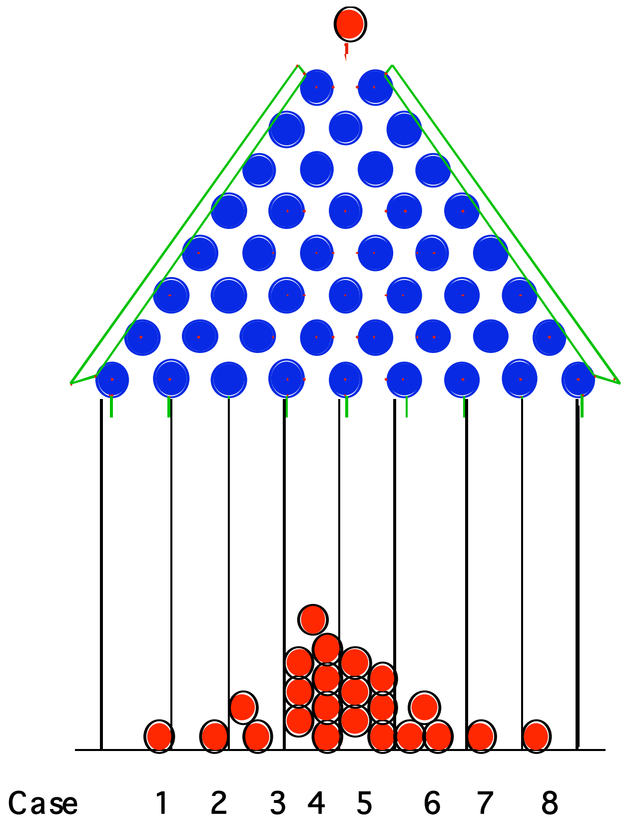
- On montre aussi (cf. chapitre suivant) que si X $\sqrt{\square}$ B(n ,p) et Y $\sqrt{\square}$ B(n', p) et si X et Y sont indépendantes alors X +Y $\sqrt{\square}$ B(n+n' ,p) résultat qui se généralise à une famille de variables indépendantes. Propriété que l'on peut généraliser à une famille finie de variables. En particulier, une somme de variables de Bernoulli de même paramètre indépendantes suit une loi Binomiale.

Il existe des tables de la loi de Binomiale, indiquant pour les différentes valeurs de n, p et k les probabilités simples P[X =k] et les probabilités cumulées P[X ≤ k].

<u>Exemple La planche de Galton</u>

La planche de Galton ou quinconce est un dispositif dans lequel une bille peut suivre différents chemins pour arriver aux cases situées en bas..
On suppose la base de la planche horizontale, de sorte qu'on peut admettre par symétrie qu'à chaque bifurcation la bille a autant de chances d'aller d'un côté ou de l'autre.
On considère une planche ayant sept rangées de bifurcation(cf. schéma). On lâche une bille et on appelle X le numéro de la case d'arrivée.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X suit une loi binomiale.



C) LA LOI HYPERGEOMETRIQUE

Soit une population de N individus parmi lesquels une proportion p possède un certain caractère. On prélève un échantillon de n individus de cette population , le tirage étant exhaustif.

Soit X le nombre d'individus ayant le caractère envisagé.

DEFINITION : Une variable aléatoire discrète X suit une loi hypergéométrique de paramètres N et n dans N^* et p dans [0, 1] lorsque ImX = { 0,1,....., n } et si k est dans ImX, on a :

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_{N}^{n}}$$

On dit alors que X suit une H(N, n, p) et on représente habituellement ceci sous la forme ci-dessous :

$$X \hookrightarrow H(N, n, p)$$

Propriétés

- On montre que si $X \hookrightarrow H(N, n, p)$ alors $\mathbf{E}[X] = np$ et $\mathbf{V}[X] = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$. (ces valeurs sont à comparer à la moyenne et la variance d'une loi binomiale B(n, p) , le facteur $\dfrac{N-n}{N-1}$ est appelé coefficient d'exhaustivité)

- On montre aussi que si $X \hookrightarrow H(N, n, p)$ et si N tend vers l'infini alors X tend vers une loi B(n, p) (en pratique la valeur N est considérée comme suffisamment grande lorsque N > 10n)

D) LA LOI DE POISSON

La loi de Poisson ou loi des évènements rares est d'un usage courant: c'est la loi du nombre de suicide par an dans un pays donné, la loi du nombre d'appels téléphoniques pendant un intervalle de temps donné, la loi du nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la livraison étant de bonne qualité...

DEFINITION : Une variable aléatoire discrète X suit une loi de poisson de paramètre un réel m positif lorsque ImX = **N** et si k est dans ImX, on a :

$$P(X = k) = \exp(-m)\frac{m^k}{k!}$$

On dit alors que X suit une P(m) et on représente habituellement ceci sous la forme ci-dessous :

$$X \hookrightarrow P(m)$$

Propriétés

- On montre que si $X \hookrightarrow P(m)$ alors $\mathbf{E}[X] = m$ et $\mathbf{V}[X] = m$
- On montre aussi que si $X \hookrightarrow P(m)$ et $Y \hookrightarrow P(m')$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow P(m+m')$ résultat qui se généralise à une famille de variables indépendantes.

1) La loi de Poisson est une approximation de la loi binomiale B(n, p) lorsque n est grand et p est petit (en pratique lorsque p< 0,1 et n>50) le paramètre m étant égal à np moyenne de la loi binomiale.

- Il existe des tables de la loi de Poisson, indiquant pour les différentes valeurs de m et de k, les probabilités simples P[X =k] et les probabilités cumulées $P[X \le k]$.

Processus de Poisson :

La loi de Poisson régit les phénomènes de file d'attente :

Soit une période de temps T (1 heure, 1 minute) , que l'on subdivise en une succession de n intervalles égaux □T = T/n.

-Si à l'intérieur de chacun de ces intervalles, la probabilité p qu'un évènement déterminé E se réalise est constante et proportionnelle à □T, p = k □T .

-Si l'on admet d'autre part que l'évènement E ne peut se produire qu'une fois au plus à l'intérieur de chacun de ces intervalles.

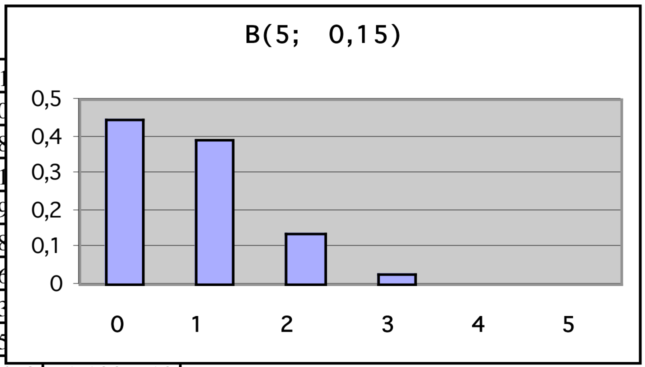
Alors la variable aléatoire X correspondant au nombre d'apparition de l'évènement E au cours de la période T est binomiale de paramètres n et p. Si on peut faire l'approximation par la loi de poisson X suit une loi de Poisson de paramètre np= kT.
On dit alors que X est un processus de Poisson. (on notera qu'alors l'expression de la loi est indépendante du découpage du temps T)
Ce type de processus régit les phénomènes de file d'attente tels que, l'attente à un guichet, l'encombrement d'un central téléphonique, l'encombrement des pistes d'atterrissage etc...

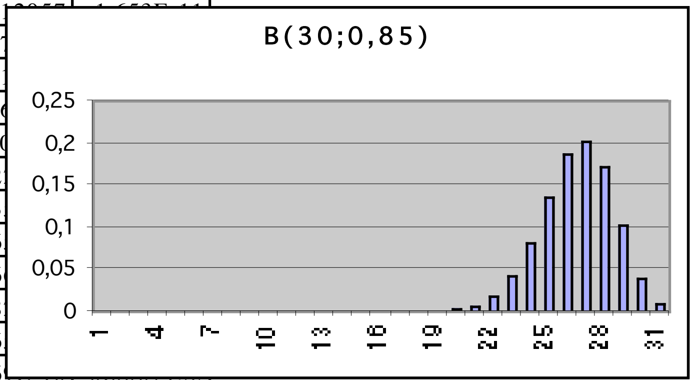
E) LA LOI GEOMETRIQUE

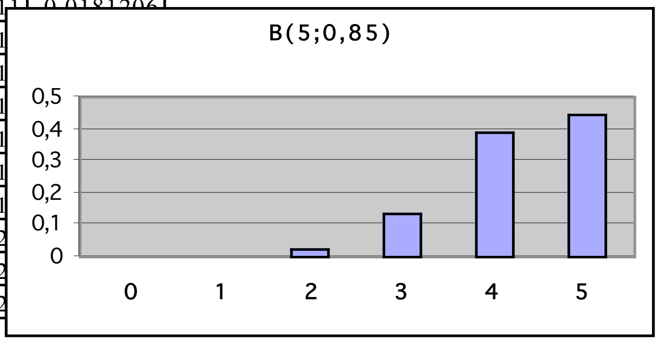
On considère une expérience ayant deux résultats possibles l'un étant appelé succès et l'autre échec.
On suppose que la probabilité de succès est p et on répète de façon indépendante l'expérience. La variable aléatoire X correspondant au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le premier succès est une loi géométrique de paramètre p.
L'image de X est égale à N* et , si k est dans l'image, $P[X=k]=(1-p)^{k-1}p$.
En considérant la série géométrique de raison 1-p, on montre que $E[X]=1/p$ et que $V[X]=(1-p)/p^2$.

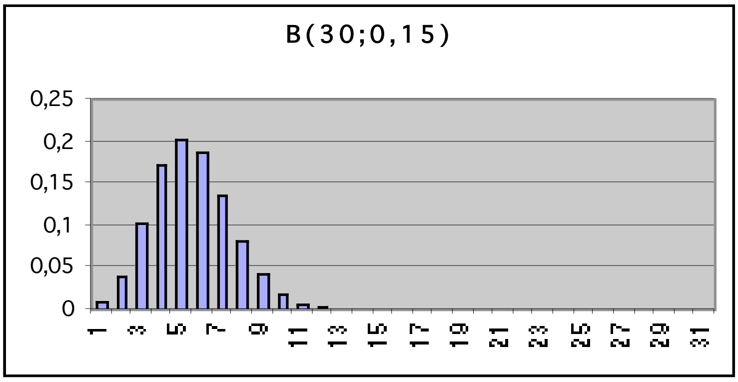
LOI BINOMIALE B(n,p)

X = k	B(5, 0,15)	B(5, 0,85)	B(30, 0,1	
0	0,4437053	7,594E-05	0,007630	
1	0,3915047	0,0021516	0,040398	
2	0,1381781	0,0243844	0,103371	
3	0,0243844	0,1381781	0,170259	
4	0,0021516	0,3915047	0,202808	
5	7,594E-05	0,4437053	0,186106	
6			0,136843	
7			0,082795	
8			0,04200678	1,193E-12
9			0,018	[illegible]
10			0,0067	
11			0,002	
12			0,0006	
13			0,000	
14			3,152	
15			5,933	
16			9,816	
17			1,426	
18			1,818	
19			2,026	
20			1,966[illegible]	[illegible]
21			1,6529E-11	0,0181206
22			1,1933E-1	
23			7,3243E-1	
24			3,7699E-1	
25			1,5966E-1	
26			5,4185E-1	
27			1,4166E-1	
28			2,6784E-2	
29			3,2598E-2	
30			1,9175E-2	



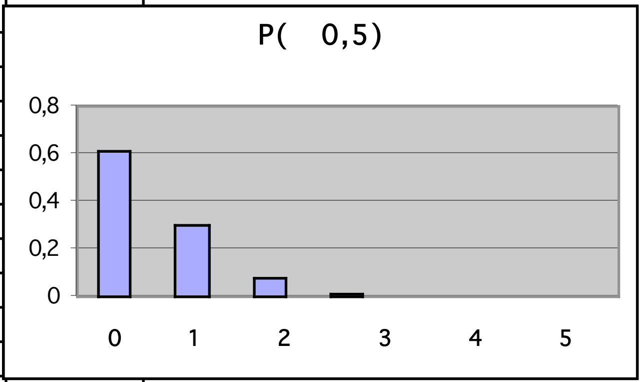


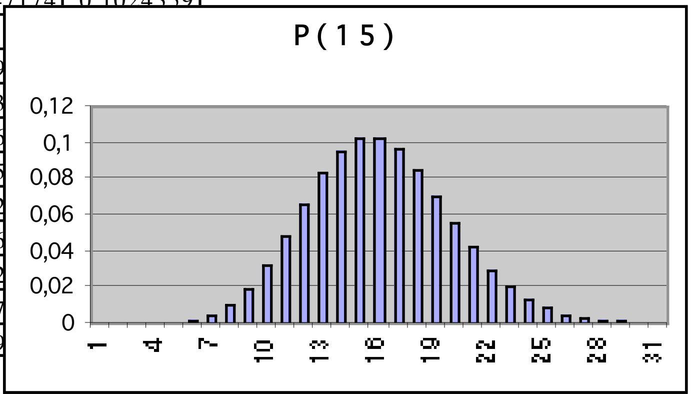


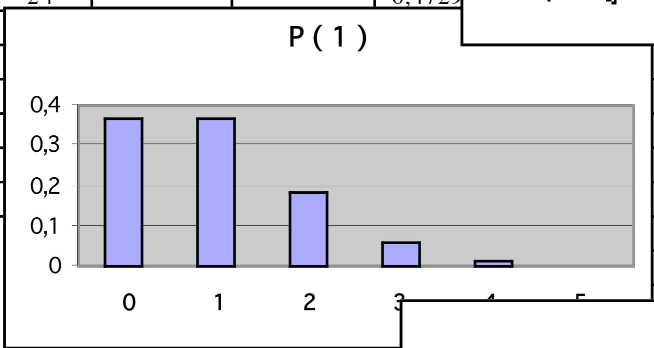


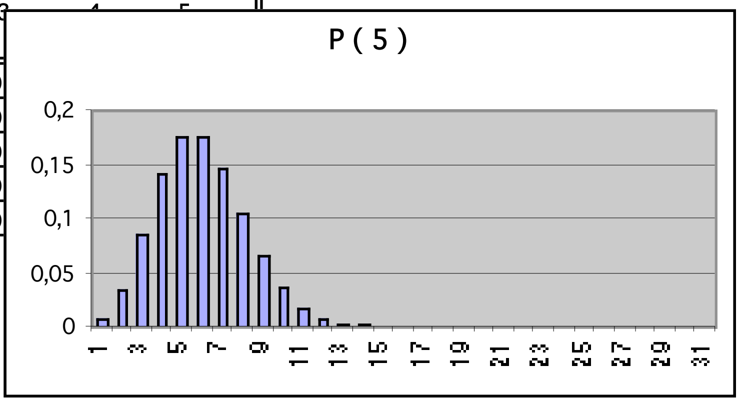
LOI DE POISSON P(m)

X = k	P(0,5)	P(1)	P(5)	P(15)
0	0,6065307	0,3678794	0,00673795	3,059E-07
1	0,3032653	0,3678794	0,03368973	4,589E-06
2	0,0758163	0,1839397	0,08422434	3,441E-05
3	0,0126361	0,0613132	0,1403739	
4	0,0015795	0,0153283	0,17546737	
5	0,000158	0,0030657	0,17546737	
6	1,316E-05	0,0005109	0,14622281	
7		7,299E-05	0,10444486	
8		9,124E-06	0,06527804	
9		1,014E-06	0,03626558	
10			0,01813279	
11			0,00824218	
12			0,00343424	
13			0,00132086	
14			0,00047174	0,1024359
15			0,0001	
16			4,9139	
17			1,4453	
18			4,0146	
19			1,0565	
20			2,6412	
21			6,2886	
22			1,4292	
23			3,107	
24			6,4729	
			0	
			0	
			0	
			0	
			0	









II- LES MODELES CONTINUS

A) LA LOI UNIFORME

Si I=[a, b] est un intervalle de **R**, on dira que X suit une loi uniforme sur I si sa densité de probabilité est constante sur I et nulle ailleurs.

Ainsi la densité f de X est telle que: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si x est dans I,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On montre que **E**[X] = $\dfrac{b+a}{2}$ et **V**[X] = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

B) LA LOI EXPONENTIELLE

On dira que X suit une loi exponentielle de paramètre m réel positif si sa densité de probabilité f est telle que: $f(x) = \begin{cases} m\exp(-mx) & \text{si x est dans } R^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On montre que **E**[X] =1/m et **V**[X] = 1/m

C)LA LOI NORMALE (ou de LAPLACE -GAUSS)

Cette loi joue un rôle fondamental en probabilités, elle constitue un modèle fréquemment utilisé dans divers domaines : variation du diamètre d'une pièce dans une fabrication industrielle, répartition des erreurs de mesure autour d'une "vraie valeur " etc. ..

Malgré son appellation malencontreuse de loi normale, elle est loin de décrire tous les phénomènes physiques et il faut se garder de considérer comme anormale une loi ne suivant pas la loi de Gauss.

Son rôle principal provient en réalité de ce qu'elle apparaît comme loi limite de caractéristiques liées à un échantillon de grande taille.

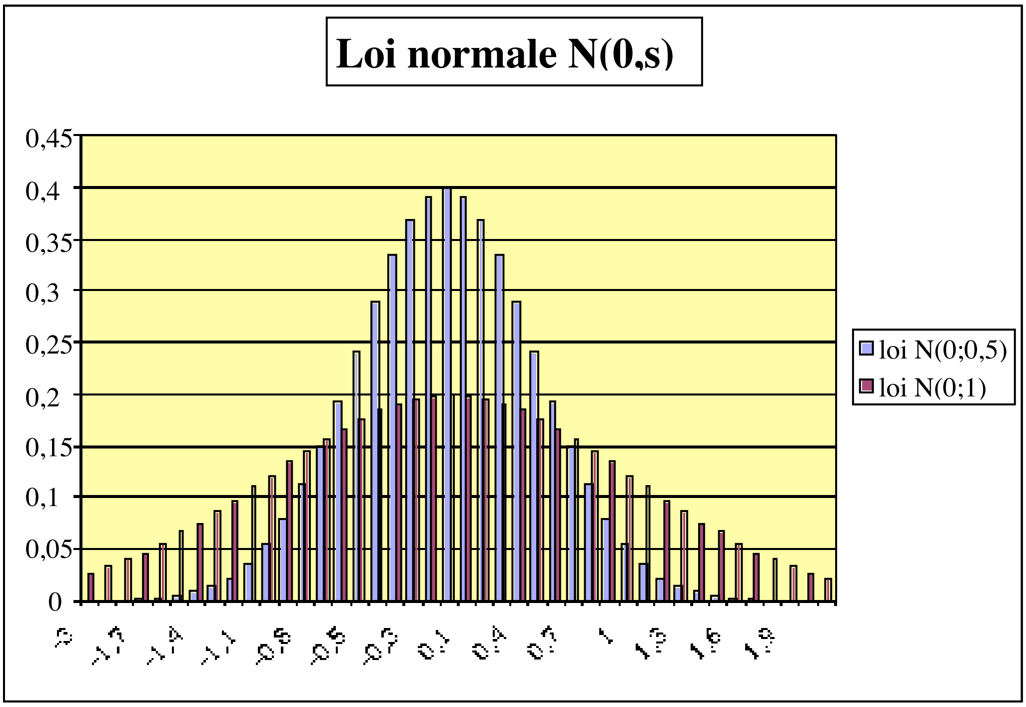
Le théorème central limite que nous établirons au chapitre suivant montre que dans certaines conditions la somme et donc la moyenne de variables indépendantes et de même loi peuvent être considérées comme normales.

DEFINITION : Une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres m dans **R** et σ dans $\mathbf{R}^+$ lorsque elle admet pour densité f la fonction:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

On dit alors que X suit une N(m, σ) et on représente habituellement ceci sous la forme ci-dessous :

$$X \hookrightarrow N(m, \sigma).$$



Propriétés

- On montre que si $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$ alors **E**[X] =m et **V**[X] = σ^2 et on peut dire que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart –type σ.

- Si on fait le changement de variable $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$, alors $Y \hookrightarrow N(0,1)$ et on dit que Y suit une loi normale centrée et réduite ou standard.

- Il existe des tables de la loi normales, indiquant pour les différentes valeurs de x les valeurs de la fonction de répartition P[X < x] lorsque $X \hookrightarrow N(0,1)$

- On montre aussi que si $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$ et $Y \hookrightarrow N(m', \sigma')$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow N(m+m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$. Cette propriété peut être généralisée à une famille finie de variables indépendantes.

-Si $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$ on a les valeurs remarquables suivantes:

$$P[m-1{,}96\sigma < X < m+1{,}96\sigma] = 0{,}95$$
$$P[m-1{,}64\sigma < X < m+1{,}64\sigma] = 0{,}9$$
$$P[m-3{,}09\sigma < X < m+3{,}09\sigma] = 0{,}998$$

D) LA LOI DE KHI-DEUX ou de PEARSON

La loi du Khi -deux est une distribution dérivée de la loi normale elle est utilisée dans les tests d'hypothèses et les estimations.

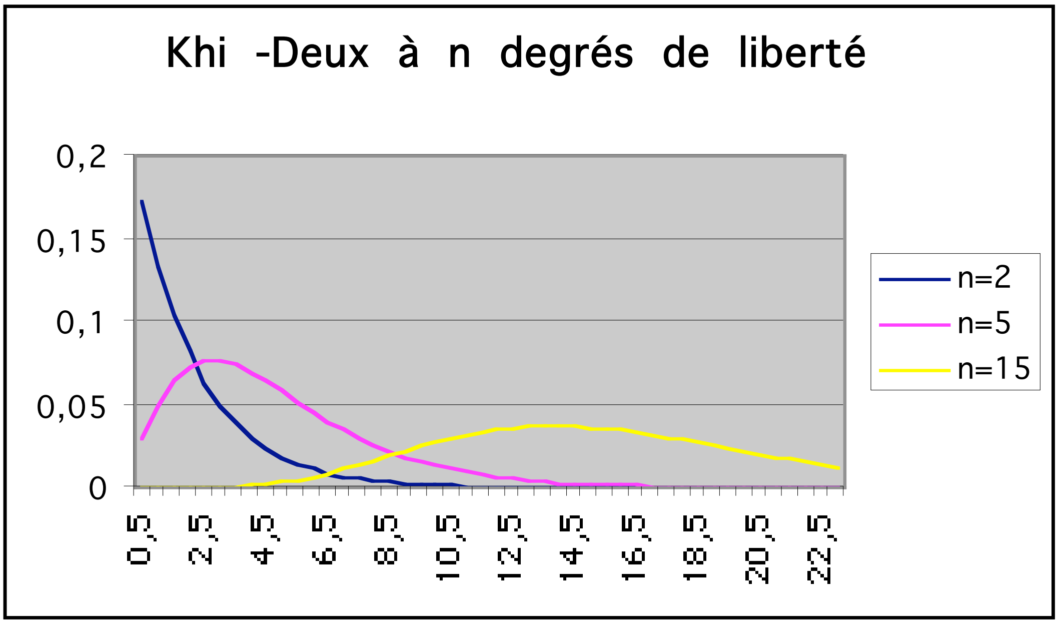
DEFINITION : Une variable aléatoire continue X suit une loi khi -deux à n degrés de liberté (n est dans **N** *)si sa densité f est :

Si x est dans $\mathbf{R}^+$ $f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2})$

et 0 ailleurs.

La fonction $x^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{x}{2})$ qui définit la densité de probabilité est appelée fonction eulérienne de seconde espèce dite fonction gamma, on montre que $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ et si p est dans **N** alors $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$

Si X suit une loi de khi -deux à n degrés de liberté, on notera $X \sim \chi^2(n)$.



On montre que **E**[X] =n et **V**[X] = 2n

On donne en annexe la table de la loi de khi -deux, indiquant pour les différentes valeurs de x les valeurs de la fonction de répartition P[X <x].

Lorsque n est supérieur à 30 on peut supposer que X suit une distribution normale , plus précisément, si Y $\leadsto$ $\chi^2(n)$ et si $n \geq 30$ alors Y $\leadsto$ $N(n, \sqrt{n})$.

THEOREME :On montre que si X est une variable aléatoire continue , somme des carrés de n variables aléatoires normales réduites , centrées et indépendantes alors X suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté .

Plus précisément, si $X_1, X_2, ..., X_k$ sont k variables aléatoires indépendantes, de même loi N(0,1) alors la variable $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté.

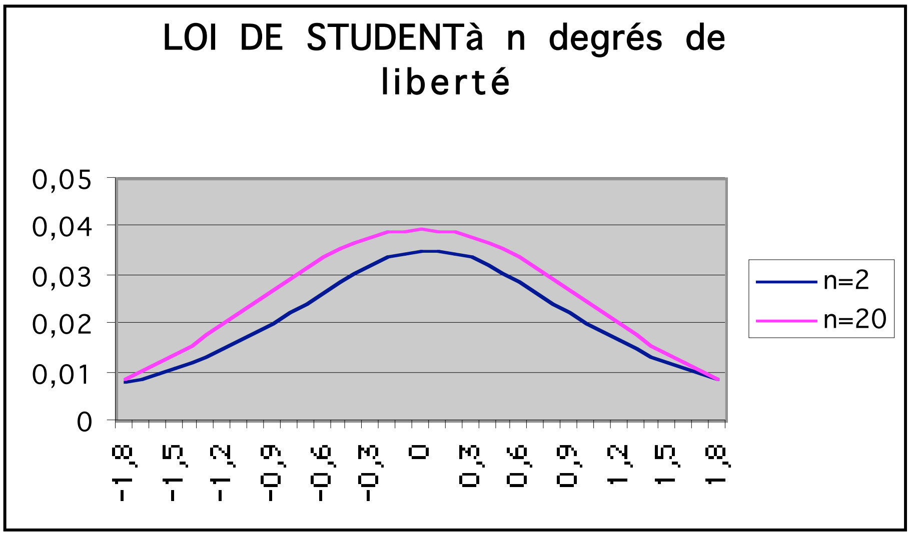
E) LA LOI DE STUDENT – FISHER.

La loi de Student -Fisher à r degrés de liberté est une distribution dérivée de la loi normale, elle est utilisée dans les tests d'hypothèses et les estimations et est notée T(r) c'est la loi du rapport des variances de deux échantillons indépendants.

DEFINITION : Une variable aléatoire continue X suit une loi Student- Fisher à r degrés de liberté (r est dans $\mathbf{N}^*$ -{1}).

Pour x dans **R** , $f(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})\sqrt{\pi r}}(1+\dfrac{x^2}{r})^{-\frac{r+1}{2}}$.

Le graphe de la fonction densité se présente comme celui d'une loi normale un peu plus aplatie.



Propriétés :

On montre que **E**[X] = 0 et **V**[X] = r/(r-2)

Lorsque n est supérieur à 30 on peut supposer que X suit une distribution normale , plus précisément :

$$\text{Si } Y \hookrightarrow T(r) \text{ et si } n \geq 30 \text{ alors } Y \hookrightarrow N\left(0, \sqrt{\frac{r}{r-2}}\right).$$

On montre que si $X_1 \hookrightarrow N(0,1)$ et si $X_2 \hookrightarrow \chi^2(r)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors la VAR , $Y = \dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{r}}}$ suit une loi de T(r).

Plus généralement, si X et $X_1, X_2, ..., X_k$ sont k+1 variables aléatoires indépendantes, de même loi N(0,1) alors la variable $Y = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2}} \hookrightarrow T(k)$.

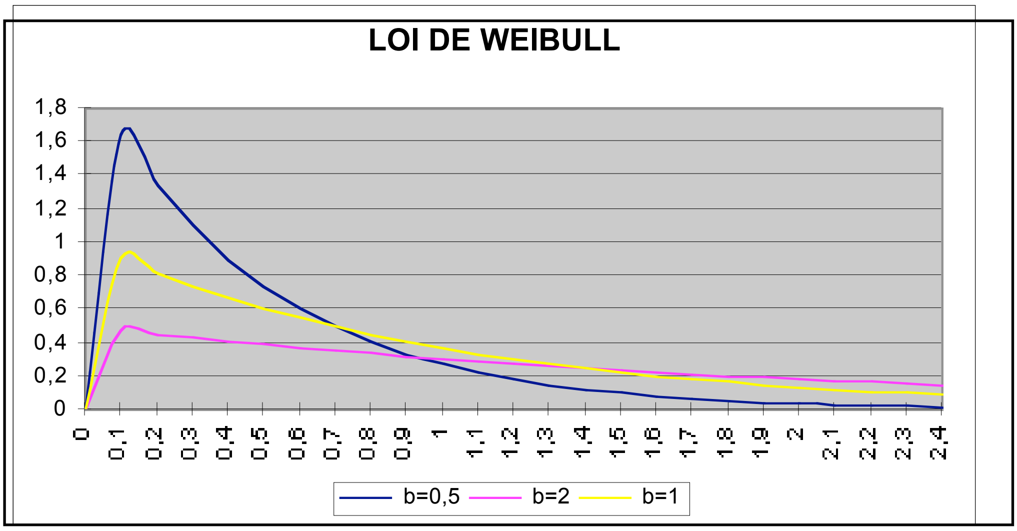
F) LA LOI DE WEIBULL

La loi de Weibull est une forme dérivée de la loi exponentielle. Cette loi est utilisée en fiabilité et représente la durée de vie des matériels.

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi de Weibull de paramètre b si elle est continue, définie sur $\mathbf{R}^+$ et de densité :

$$f(x)=b\,x^{b-1}\exp(-x^b)$$

Le paramètre b est le paramètre de « forme » :
-Si 0< b<1 la loi correspond à un matériel qui se bonifie avec le temps.
-b=1 , la loi correspond à un matériel sans usure.
-Si 1< b la loi correspond à un matériel qui se dégrade avec le temps.



EXERCICES DU CHAPITRE III

Exercice 1

Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2 . Un tireur lance une fléchette sur cette cible. Il atteint la partie 2 avec la probabilité 1/6 et marque alors 2 points. Il atteint la partie 1 avec la probabilité 1/3 et marque alors 1 point.

a) Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ?(il ne marque alors aucun point)

b) Le tireur lance sa fléchette 2 fois ; les 2 lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X, la fonction de répartition de X, F(X).

Exercice 2

Une urne U_1 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3, 4. Une urne U_2 contient 5 jetons ; 3 numérotés 2, 2 numérotés 3. On tire un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2.

On suppose pour chaque urne , l'équiprobabilité de tirage d'un jeton.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des nombres portés par les jetons choisis. Déterminer la loi de probabilité de X, la fonction de répartition de X, F(X).

Exercice 3

Un forain imagine le jeu suivant, "A tous les coups on gagne".

Chaque joueur fait tourner deux petites roues divisées chacune en 10 secteurs égaux ; la 1ère a 3 secteurs rouges et 7 blancs ; la 2ème a un secteur noir et 9 blancs ; lorsque les deux roues s'arrêtent l'une sur le rouge, l'autre sur le noir, le joueur gagne un gros lot qui revient au forain à 20 euros ; lorsque l'une des deux roues seulement est sur le blanc, le joueur gagne un lot qui revient au forain à 2euros ; lorsque les deux roues sont sur le blanc, le joueur gagne un lot qui revient au forain à 1euro.

Le forain fait payer un montant m (en euros) pour chaque partie.

1) On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice du forain sur cette partie. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2)Quelle valeur le forain doit-il donner à m pour avoir une espérance de bénéfice égale à au moins 1euro par partie ?

On suppose que les 2 roues sont *indépendantes*, et que les probabilités d'arrêt de chaque roue sur un secteur sont égales.

Exercice 4

Deux enfants disposent chacun d'une boite contenant 10 jetons de forme identique, numérotés de 1 à 10. A un signal, chaque enfant prend un jeton dans sa boîte et le dépose sur une table. On désigne par E l'événement "les 2 jetons déposés sur la table ont le même numéro".

1) Quelle est la probabilité pour que l'événement E se réalise ?

2) On répète de façon indépendante dix fois l'épreuve et on désigne par X le nombre de fois où l'événement E se réalise.
Quelle est la probabilité pour que E se réalise au moins une fois au cours de ces dix expériences ?
3) Calculer **E**(X), **V**(X) et □(X).

4) Combien faudrait-il faire d'expériences pour que l'on ait au moins 99 chances sur 100 de voir E se réaliser au moins une fois ?

Exercice 5

Un étudiant a une probabilité égale à 0,3 d'obtenir la moyenne à chaque contrôle
Il subit 3 contrôles dont les résultats sont indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne jamais la moyenne ?

b) Donner la loi de la variable aléatoire X : "nombre de notes supérieures ou égales à la moyenne parmi les 3", calculer **E**(X), **V**(X) et □(X).
.

Exercice 6
On effectue n jets d'une pièce de monnaie "équilibrée" (c'est à dire, telle qu'à chaque jet la probabilité d'obtenir "Pile" soit égale à celle d'obtenir "Face").

1 -Quelle est la probabilité :
- d'obtenir k fois "Pile" ?
- d'obtenir k fois "Face" ?

Donner l'espérance de la VAR X correspondant au nombre de "Faces" obtenues.

2 -A l'issue de chaque épreuve de n jets le joueur reçoit 1 franc par "Face" et donne 1 franc par "Pile".
On appelle G la variable aléatoire résultat : nombre de francs reçus moins nombre de francs donnés.
a) Quelle est la probabilité que G soit égale à 0 ?
b) Montrer que $P[G = l] = P[G = -l]$. En déduire **E** [G].
c) Donner la loi de G.

Pour $n = 4$, donner les valeurs numériques de $P[G = l]$. Calculer l'écart -type de G.

Exercice 7
On considère une urne à deux catégories contenant b boules blanches et $a - b$ boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en y remettant en même temps r boules de la même couleur que la boule tirée (r peut être négatif). Ceci constitue le premier tirage. Puis on retire une autre boule de l'urne ainsi modifiée, on remet dans l'urne la boule tirée ainsi que r boules de la même couleur que cette dernière. Cela constitue le deuxième tirage. On continue de la même façon et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues sur n tirages.

1) Quelle est la probabilité d'avoir k blanches aux k premiers tirages puis $(n - k)$ noires aux tirages suivants ?

En déduire la loi de probabilité de X .

2) Quelles sont les lois obtenues dans chacun des deux cas particuliers suivants :

a) $r = 0$? ; b) $r = -1$?

Exercice 8

Le quart d'une population de cardinal n a été vacciné contre une maladie contagieuse M . Lors d'une épidémie, on constate que parmi les malades il y a 20% de vaccinés, et que sur l'ensemble des vaccinés il y a un malade sur 10 .

1) Quelle est la probabilité qu'un non vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

2) On note X la variable aléatoire représentant le nombre de malades au cours d'une épidémie.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

b) Lorsque $n = 500$, calculer une valeur approchée de $P[X > 200]$.

Exercice 9

Dans votre entreprise la dactylographie est faite par 7 secrétaires qualifiées et 5 autres qui travaillent mal. Les travaux à faire sont distribués au hasard entre ces douze personnes. Ils sont effectués le jour même et chaque jour les 12 secrétaires sont disponibles.

1) Vous donnez deux travaux à dactylographier simultanément ; quelle est la probabilité :

a) pour que les deux travaux soient bien tapés,
b) pour que l'un d' eux soit bien tapé et l'autre pas?

2) Vous avez déjà donné deux travaux et vous savez qu'ils ont été confiés chacun à une "bonne" secrétaire ; vous donnez un troisième travail le même jour : il est donc donné au hasard à une troisième secrétaire, encore inoccupée.

Quelle est la probabilité pour que ce troisième travail soit bien fait ?

3) Pendant six jours, vous donnez chaque jour simultanément deux manuscrits à taper. On considère comme un succès le fait que les deux manuscrits soient bien tapés. Soit X la variable aléatoire "nombre de succès obtenus au cours des 6 jours"

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Calculer l'espérance mathématique de X, l'écart -type de X .

Exercice 10

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre quatre portes d'apparences identiques dont l'une est dite »bonne » et les autres sont

dites »mauvaises ». Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.
On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre de choix de portes nécessaire pour que le rat choisisse la bonne porte pour la première fois.
On envisage trois hypothèses :

H1 : Le rat n'a aucune mémoire, il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des quatre portes.

H2 : Le rat a une mémoire immédiate, à chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte choisie à l'essai précédent et il choisit de façon équiprobable l'une des trois autres portes.

H3 : Le rat a une bonne mémoire, à chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées.

Déterminer , dans chacune des hypothèses, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Evaluer dans chaque cas la moyenne E[X] et la variance V[X].

<u>Exercice 11</u>

X étant une VAR continue telle que Im X = $]0,+\infty[$ et de fonction de répartition F.

1) Quelle est la fonction de répartition de la VAR $Y = 1/X$?

2) Si X admet la densité $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} & \text{si } x \in]0,\theta[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Calculer θ, **E**[X], **E**[Y] et la densité de Y.

<u>Exercice 12</u>

Soit X une VAR continue de densité $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in]0,\frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$.

1)Donner la fonction de répartition de X et déterminer la médiane M, M est la valeur telle que $P[X<M]=1/2$.

2)Calculer **E** [X] et en déduire un majorant de P [X > 1].

3)On pose Y = tan X. Quelle est la loi de Y ?

<u>Exercice 13</u>
Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = k \exp(-|x|)$

1) Déterminer la valeur de k pour laquelle f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X . Donner alors la fonction de répartition de X.

2) Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y, quelle est la densité de Y ?

Exercice 14

On considère la fonction ci-dessous:

$$f(x) = \begin{cases} \square 2^{\square[x]} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

où [x] désigne la partie entière de x .

Calculer □ pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue X .

Calculer l'espérance mathématique E[X].

Exercice 15

Soit X une VAR normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, X est normale, centrée et réduite.
Calculer la densité de probabilité et l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Y = e^X$.
On pose $Z=X^2$, montrer que Z suit une loi de Khi-deux.

Exercice 16

X étant une VAR de fonction de répartition F continue et strictement croissante, on considère la VAR Y = F(X).
Montrer que la loi de probabilité de Y.est uniforme sur un intervalle à préciser.

Exercice 17

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 3 et d'écart -type 2. Quelle est la probabilité des évènements suivants :

a) $P[1 \leq X \leq 2]$
b)$P[1 \leq X \leq 2 / X<3]$

Lors d'un tir, on admet que les longueurs des tirs suivent une loi normale. On constate que :
-10 % des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km.
-25 % des obus tombent à une distance inférieure à 1, 4 km.
Déterminer la longueur moyenne des tirs et l'écart type.

Exercice 18

On considère une VAR X normale, d'espérance μ et de variance $\square^2$; sa fonction de répartition est notée F et on pose F(a) = □, F(b) = ß (a et b réels fixés).
1) Exprimer $P [X \geq a]$ et $P [a < X < b]$ en fonction de □ et ß .

2) On forme la VAR. discrète Y de la façon suivante :

Y prend la valeur -1 si $X < a$

Y prend la valeur 0 si $a \leq X \leq b$

Y prend la valeur 1 si $X > b$.

a) Calculer $P[Y = 1]$ et $\mathbf{E}[Y]$.

b) Préciser la loi de Y si $a = \mu - □$ et $b = \mu + □$.

c) Déterminer a et b (fonction de μ et □) pour que Y soit une v.a. uniforme. Calculer alors $\mathbf{V}[Y]$.

Exercice 19

Dans une grande ville, un automobiliste peut :

- soit se garer dans un parking payant, tarif S euros, quelle que soit sa durée ;
- soit se trouver en stationnement interdit avec une probabilité égale à 0,2 de se voir infliger une contravention : tarif C euros. Toute autre possibilité de stationner est exclue dans ce problème.

Un usager se trouve " régulièrement" en stationnement interdit 225 fois par mois.

1) Quelle est la loi de probabilité du nombre X des contraventions qu'il se voit infliger chaque mois ? Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}[X]$.

2) Justifier que l'on peut supposer que la loi de X est une loi de Laplace -Gauss dont on précisera les paramètres.

3) Calculer avec cette approximation :

$P[X < 55]$ et $P[31 \leq X < 59]$

4) Déterminer un intervalle [a, b] centré en la moyenne tel que :

$P[a \leq X < b] = 0,95$

5) Si S = 2, quel doit être le tarif C de la contravention pour que cet usager soit perdant à la fin du mois avec une probabilité de 0,75.

6) Si la contravention est à 10 euros , quel tarif S doivent pratiquer les parkings pour avoir la clientèle de cet usager s'il désire être gagnant en fin de mois avec une probabilité de 0,75 ?

.

Exercice 20

Une usine possède un restaurant d'entreprise qui assure chaque jour deux services. Chacun des 900 employés de l'usine se présente indifféremment à l'un ou l'autre des services avec une probabilité de 0,5. Par ailleurs, on suppose que les choix de 2 employés sont indépendants et que chaque employé prend un repas et un seul.

a) Quelle est la probabilité que le nombre de personnes se présentant au premier service soit supérieur à 500 ?

b) De quel nombre de places minimum faut-il disposer dans le restaurant pour que la probabilité de pouvoir répondre à la demande aux deux services soit supérieure à 0,95 ?

c) En fait, le nombre total de repas à servir chaque jour est un nombre aléatoire ; chaque employé a chaque jour une probabilité de 0,1 de ne pas prendre son repas à l'usine pour diverses raisons (maladie, congés,...) ; 900 est donc un nombre plafond.

Combien de repas convient-il de préparer pour que la probabilité de pouvoir satisfaire la demande soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 21

Le nombre de clients d'un grand magasin dans une journée, est supposé être une variable aléatoire N de loi de Poisson de paramètre λ réel positif non nul. Pour payer ses achats, chaque client utilise l'une des p caisses mises à sa disposition.
Toutes les caisses ont autant de chances d'être utilisées. On admet que tous les clients font des achats. On note X le nombre d'utilisateurs, par jour, de la caisse n°1.

1) On suppose que tous les clients paient leurs achats.
Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ (n dans $\mathbf{N}$) ? En déduire la loi de X .

2) On suppose, qu' en moyenne, un client sur 10 sort du magasin sans payer ses achats.
Quelle est alors la loi de X ?